V. LAURENTOVY ŘADY A REZIDUA

1. Najděte Laurentovy rozvoje funkcí v maximálních mezikružích o uvedených středech:
a) $\frac{1}{z-z^3}$, 0 a 1; b) $e^{1/z}$, 0; c) $\sin\frac{1}{z}$, 0; d) $e^{z-1/z}$, 0; e) $\frac{\cos z}{z+\pi}$, 0 a π; f) $\frac{\sin z}{z}$, π;
g) $\frac{\exp z}{z}$, 1; h) $\frac{\sin z}{z-1}$, 0; i) $\sin(z+\frac{1}{z})$, 0; j) $\cos(z-\frac{1}{z})$, 0.

2. Spočtěte rezidua funkcí z příkladu 1 v uvedených bodech.

3. Spočtěte integrály: a) $\int_0^{2\pi} e^{\sin x}\,\mathrm{d}x$, b) $\int_0^{2\pi} \cos(x-\sin x)\,\mathrm{d}x$, c) $\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(3x-\sin x)\,\mathrm{d}x$.
[NÁVOD: Postupujte jako v příkladu III/5. Součástí řešení je výpočet rezidua v bodě podstatné singularity.]

VÝSLEDKY A NÁVODY. **1.** a) v $P(0,1)$: $\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1}$, v $P(0,1,+\infty)$: $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{2n+1}}$, v $P(1,1)$: $-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(1+\frac{1}{2^{n+2}})(z-1)^n$, v $P(1,1,2)$: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(z-1)^n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n$, v $P(1,2,+\infty)$: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(1+2^{n-2})}{(z-1)^n}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\cdot z^n}$ v $P(0,+\infty)$; c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot z^{2n+1}}$ v $P(0,+\infty)$; d) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=\max\{0,-n\}}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\right)z^n$ v $P(0,+\infty)$; e) V $U(0,\pi)$: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^{n-k}}{(2k)!\cdot\pi^{n-2k+1}}\right)z^n$, v $P(0,\pi,+\infty)$: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=\max\{0,\lceil\frac{n+1}{2}\rceil\}}^{\infty}\frac{(-1)^{k-n-1}\pi^{2k-n-1}}{(2k)!}\right)z^n$, v $P(\pi,\infty)$: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z-\pi)^{2n-1}}{(2n)!}$. f) $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{[\frac{m-1}{2}]}\frac{(-1)^{m-n}}{\pi^{m-2n}(2n+1)!}\right)(z-\pi)^k$ na $\mathbb{C}$ (v 0 je odstranitelná singularita); g) V $U(1,1)$: $\sum_{k=0}^{\infty}\left(e\cdot\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{k-j}}{j!}\right)(z-1)^k$, v $P(1,1,\infty)$: $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(e\cdot\sum_{j=\max\{0,k+1\}}^{\infty}\frac{(-1)^{k-j+1}}{j!}\right)(z-1)^k$; h) V $U(0,1)$: $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{[\frac{k-1}{2}]}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\right)z^k$; v $P(0,1,\infty)$: $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=\max\{0,\lceil\frac{k}{2}\rceil\}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right)z^k$. i) v $P(0,\infty)$: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{m=\max\{0,-n\}}^{\infty}\frac{1}{(2m+2n+1)!(2m)!}-\sum_{m=\max\{0,-n-1\}}^{\infty}\frac{1}{(2m+2n+2)!(2m+1)!}\right)z^{2n+1}$; j) v $P(0,\infty)$: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{m=\max\{0,-n\}}^{\infty}\left(\frac{1}{(2m+2n)!(2m)!}+\frac{1}{(2m+2n+1)!(2m+1)!}\right)\right)z^{2n}$. **2.** Reziduum určíme jako příslušný koeficient ve spočteném Laurentově rozvoji. Tedy: a) 1 v bodě 0, $-\frac{1}{2}$ v bodě 1; b) 1; c) 1; d) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k-1)!}$; e) 0 v bodě 0, -1 v bodě π; f) 0; g) 0; h) 0; i) $-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)!(2m)!}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m)!(2m+1)!}=0$; j) 0.
3. a) $2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n(n!)^2}$, b) $2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(2n+1)(2n+2)-1}{2^{4n+3}(2n+1)!(2n+2)!}$, c) $\frac{\pi}{3}$.