ÚVOD DO KOMPLEXNÍ ANALÝZY

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – LS 2024/2025

PŘÍKLADY KE KAPITOLE IV

Příklad 1. Nechť funkce f a g jsou holomorfní na okolí bodu $a \in \mathbb{C}$, $f(a) = g(a) = 0$ a g není konstantní na okolí bodu a. Ukažte, že

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to a} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

`Návod:` *g má v bodě a kořen nějaké násobnosti, f je buď konstantní nula na okolí bodu a nebo má v bodě a kořen nějaké násobnosti. Spočtěte obě limity (proveďte rozbor možností) a ukažte, že ve všech případech limity existují a rovnají se.*

Příklad 2. Nechť funkce f a g jsou holomorfní na okolí bodu $a \in \mathbb{C}$ a v bodě a mají obě pól. Ukažte, že

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to a} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

`Návod:` *Spočtěte obě limity (proveďte rozbor možností v závislosti na násobnostech pólů) a ukažte, že ve všech případech limity existují a rovnají se.*

Příklad 3. Ukažte, že každá funkce holomorfní na $\overline{\mathbb{C}}$ je konstantní.

`Návod:` *Použijte kompaktnost $\overline{\mathbb{C}}$ (použijte ztotožnění s $\mathbb{S}_2$ dle Věty IV.1) a Liouvilleovu větu (Věta III.18).*

Příklad 4. Nechť f je celá funkce, která má v ∞ pól násobnosti $p \in \mathbb{N}$. Ukažte, že f je polynom stupně p.

`Návod:` *Využijte poznámku za Liouvilleovou větou pro $n = p + 1$.*

Příklad 5. Ukažte, že každá množina izolovaná v $\overline{\mathbb{C}}$ je konečná.

`Návod:` *Použijte kompaktnost $\overline{\mathbb{C}}$.*

Příklad 6. Nechť $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ je konečná, $f : \overline{\mathbb{C}} \setminus M \to \mathbb{C}$ je funkce holomorfní na $\overline{\mathbb{C}} \setminus M$, která má v každém bodě množiny M pól (tj., f je meromorfní na $\overline{\mathbb{C}}$). Ukažte, že f je racionální funkce (tj. podíl dvou polynomů).

`Návod:` *Najděte polynom Q takový, že funkce $f \cdot Q$ má ve všech bodech množiny $M \cap \mathbb{C}$ odstranitelnou singularitu, tedy po dodefinování limitou jde o celou funkci. Na tuto funkci aplikujte Příklad 4.*

Příklad 7. Označme $f(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ a $g(z) = \pi \operatorname{cotg} \pi z$.

(1) Ukažte, že funkce f a g jsou holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
(2) Ukažte, že v každém bodě $k \in \mathbb{Z}$ mají funkce f a g pól násobnosti jedna.
(3) Ukažte, že pro $k \in \mathbb{Z}$ platí $\operatorname{res}_k f = (-1)^k$ a $\operatorname{res}_k g = 1$.

Příklad 8. Ukažte, že funkce Γ (viz Příklady 6 a 16 ke Kapitole III) má v každém z bodů $0, -1, -2, \dots$ pól násobnosti jedna a spočtěte rezidua funkce Γ v těchto bodech.

`Návod:` *Použijte znalost hodnoty $\Gamma(1) = 1$ a platnost vzorce $\Gamma(s) = \frac{1}{s}\Gamma(s+1)$ pro $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ (a vzorec z Věty IV.4(2)).*

Příklad 9. Ukažte, že funkce ζ (viz Příklady 17–19 ke Kapitole III) má v bodě 1 pól násobnosti 1 a spočtěte reziduum v tomto bodě.

`Návod:` *Použijte vzorec z Příkladu 19(2) ke Kapitole III.*

Příklad 10. Nechť $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a f, g jsou dvě funkce holomorfní na $P(a, r)$. Rozhodněte, jaký typ izolované singularity má v bodě a funkce fg za předpokladu, že

(1) f má v bodě a pól násobnosti p a g má v bodě a pól násobnosti q;
(2) f má v bodě a pól a g má v bodě a podstatnou singularitu;
(3) f má v bodě a pól násobnosti p a g má v bodě a kořen násobnosti q;
(4) f má v bodě a odstranitelnou singularitu a g má v bodě a podstatnou singularitu;
(5) f i g mají v bodě a podstatnou singularitu.

`Návod:` *(4) Rozlište případ, kdy f je konstantní nulová funkce, od ostatních případů. (5) Pomocí konkrétních příkladů ukažte, že mohou nastat všechny možnosti.*

Příklad 11. Nechť $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a f, g jsou dvě funkce holomorfní na $P(a, r)$. Rozhodněte, jaký typ izolované singularity může mít v bodě a funkce $f + g$ za předpokladu, že

(1) f má v bodě a pól násobnosti p a g má v bodě a pól násobnosti q;
(2) f má v bodě a pól a g má v bodě a podstatnou singularitu;
(3) f má v bodě a odstranitelnou singularitu;
(4) f i g mají v bodě a podstatnou singularitu.

`Návod:` *(1) Rozlište případy $p = q$ a $p \neq q$. Možnosti pro případ $p = q$ ilustrujte konkrétními příklady. (4) Pomocí konkrétních příkladů ukažte, že mohou nastat všechny možnosti.*

Příklad 12. Nechť $a \in \mathbb{C}$ a funkce f je holomorfní na nějakém prstencovém okolí bodu a, přičemž v bodě a má podstatnou singularitu.

(1) Na příkladu konkrétní funkce f ukažte, že funkce $\frac{1}{f}$ nemusí mít v bodě a izolovanou singularitu.
(2) Na příkladu konkrétní funkce f ukažte, že funkce $\frac{1}{f}$ může mít v bodě a izolovanou singularitu.
(3) Nechť funkce $\frac{1}{f}$ má v bodě a izolovanou singularitu. Ukažte, že to musí být podstatná singularita.
(4) Ukažte, že existuje $c \in \mathbb{C}$, že funkce $\frac{1}{f-c}$ nemá v bodě a izolovanou singularitu.
(5) Musí existovat $c \in \mathbb{C}$, že funkce $\frac{1}{f-c}$ má v bodě a izolovanou singularitu?
(6) Pro kolik různých hodnot $c \in \mathbb{C}$ může mít funkce $\frac{1}{f-c}$ v bodě a izolovanou singularitu?

`Návod:` *(1,2) Uvědomte si, že funkce $\frac{1}{f}$ má v bodě a izolovanou singularitu, právě když f je nenulová na nějakém prstencovém okolí bodu a. (3,4) Použijte Casorati-Weierstrassovu větu (Věta IV.2). (5) Využijte například Příklad 10 ke kapitolám I a II. (6) Použijte Velkou Picardovu větu (viz poznámka za Větou IV.2).*

Příklad 13. Nechť $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a f, g jsou dvě funkce holomorfní na $U(a,r)$, které nejsou konstantně rovny nule. Předpokládejme, že g má v bodě a kořen násobnosti $p \in \mathbb{N}$ a pro $z \in U(a,r)$ platí $|f(z)| \leq |g(z)|$. Ukažtem že funkce f má v bodě a kořen násobnosti alespoň p.

`Návod:` *Použijte Casorati-Weierstrassovu větu (Věta IV.2) na funkci* $\frac{f}{g}$.

Příklad 14. Nechť $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a f, g jsou dvě funkce holomorfní na $P(a,r)$, které nejsou konstantně rovny nule. Předpokládejme, že g má v bodě a pól násobnosti $p \in \mathbb{N}$ a pro $z \in P(a,r)$ platí $|f(z)| \leq |g(z)|$. Ukažtem že funkce f má v bodě a buď odstranitelnou singularitu nebo pól násobnosti nejvýše p.

`Návod:` *Použijte Casorati-Weierstrassovu větu (Věta IV.2) na funkci* $\frac{f}{g}$.

Příklad 15. Nechť f a g jsou dvě celé funkce, pro které platí, že $|f(z)| \leq |g(z)|$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Ukažte, že funkce f je násobkem funkce g.

`Návod:` *Pokud f nebo g je konstatní nulová funkce, je to zřejmé. Pokud f a g nejsou konstatní nulové funkce, uvažme funkci $\frac{f}{g}$. Pomocí kombinace věty o jednoznačnosti (Věta III.21) a Casorati-Weierstrassovy věty (Věta IV.2) ukažte, že funkci $\frac{f}{g}$ lze (jednoznačně) rozšířit na celou funkci. Dokončete s použitím Liouvilleovy věty (Věta III.18).*

Příklad 16. Nechť f je racionální funkce. Ukažte, že f je součtem polynomu a lineární kombinace funkcí tvaru $z \mapsto \frac{1}{(z-a)^k}$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{N}$. (To dává důkaz věty o rozkladu na parciální zlomky.)

`Návod:` *f má v $\mathbb{C}$ konečně mnoho pólů – $a_1, \ldots, a_n$. Pro $j = 1, \ldots, n$ nechť g_j je hlavní část Laurentovy řady funkce f v prstencovém okolí bodu a_j. Pak $f - \sum_{j=1}^n g_j$ je racionální funkce, která je holomorfní na $\mathbb{C}$, tedy je to polynom.*

Příklad 17. Nechť f je racionální funkce a $z_1, \ldots, z_n$ všechny její póly v $\mathbb{C}$. Ukažte, že

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{res}_{z_j} f = a_{-1},$$

kde a_{-1} je koeficient u z^{-1} v Laurentově rozvoji funkce f v prstencovém okolí ∞.

`Návod:` *Označte φ kladně orientovanou kružnici s dostatečně velkým poloměrem a spočtěte $\int_\varphi f$ dvěma způsoby – podle reziduové věty a pomocí Laurentova rozvoje v prstencovém okolí ∞.*