VI.4 Determinanty

Definice. Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Maticí $\mathbb{A}_{ij}$ budeme rozumět matici typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z $\mathbb{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Definice. Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$. **Determinant matice** $\mathbb{A}$ definujeme takto:

$$
\begin{aligned}
\det \mathbb{A} &= a_{11}, && \text{pokud } n = 1, \\
\det \mathbb{A} &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det \mathbb{A}_{i1}, && \text{pokud } n > 1.
\end{aligned}
$$

Pro $\det \mathbb{A}$ budeme také používat symbol $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Lemma 8. *Nechť $i \in \{1, \dots, n\}$, matice $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times n)$ se shodují ve všech prvcích s výjimkou prvků v i-tém řádku a přitom i-tý řádek matice $\mathbb{C}$ je roven součtu i-tého řádku matice $\mathbb{A}$ a i-tého řádku matice $\mathbb{B}$. Pak* $\det \mathbb{C} = \det \mathbb{A} + \det \mathbb{B}$.

Věta 9 (determinant a řádkové úpravy). *Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$.*

- (i) *Nechť matice $\mathbb{A}'$ vznikne z $\mathbb{A}$ tak, že v $\mathbb{A}$ vyměníme dva řádky mezi sebou (tj. provedeme řádkovou elementární úpravu prvního druhu). Pak platí* $\det \mathbb{A}' = -\det \mathbb{A}$.
- (ii) *Nechť matice $\mathbb{A}'$ vznikne z $\mathbb{A}$ tak, že v $\mathbb{A}$ jeden řádek vynásobíme reálným číslem λ. Pak platí* $\det \mathbb{A}' = \lambda \det \mathbb{A}$.
- (iii) *Nechť matice $\mathbb{A}'$ vznikne z $\mathbb{A}$ tak, že v $\mathbb{A}$ λ-násobek jednoho řádku přičteme k jinému řádku (tj. provedeme řádkovou elementární úpravu třetího druhu). Pak platí* $\det \mathbb{A}' = \det \mathbb{A}$.

Důsledek. *Nechť matice $\mathbb{A}'$ vznikne z matice $\mathbb{A}$ provedením nějaké transformace. Pak* $\det \mathbb{A}' = 0$, *právě když* $\det \mathbb{A} = 0$.

Věta 10. *Pro $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ platí* $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{A}^T$.

Důsledek. *Analogie Věty 9 platí i pro sloupcové úpravy.*

Věta 11. *Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Pak*

$$\det \mathbb{A} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbb{A}_{ij} \qquad \text{(rozvoj podle } j\text{-tého sloupce)}$$

a

$$\det \mathbb{A} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det \mathbb{A}_{ji} \qquad \text{(rozvoj podle } j\text{-tého řádku).}$$

Definice. Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$. Řekneme, že $\mathbb{A}$ je **horní trojúhelníková matice,** jestliže platí $a_{ij} = 0$ pro $i > j$, $i, j \in \{1, \dots n\}$. Řekneme, že $\mathbb{A}$ je **dolní trojúhelníková matice,** jestliže platí $a_{ij} = 0$ pro $i < j$, $i, j \in \{1, \dots n\}$.

Věta 12. *Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$ je horní (resp. dolní) trojúhelníková matice. Pak platí* $\det \mathbb{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$.

Věta 13. *Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Pak $\mathbb{A}$ je regulární, právě když* $\det \mathbb{A} \neq 0$.

Věta 14. *Pro $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(n \times n)$ platí* $\det \mathbb{A}\mathbb{B} = \det \mathbb{A} \cdot \det \mathbb{B}$.