Písemná zkouška z Matematické analýzy II pro informatiky (B)
LS 2003-2004, kruhy 31–36 a 43–46

Příklad 1 : Spočtěte primitivní funkci

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-1)(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x$$

na maximálních intervalech, kde existuje. (17 bodů)

Příklad 2 : Na kterých intervalech konverguje stejnoměrně posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n^x}, \qquad x \in \langle 0, +\infty) \text{ ?}$$

(13 bodů)

Příklad 3 : Pro funkci $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n(1+\frac{x}{1+|x|})}$ určete definiční obor, obor spojitosti a limity v $+\infty$ a v $-\infty$.

(13 bodů)

Příklad 4 : Rozviňte funkci

$$(x-1)^2, \qquad x \in (0, \pi)$$

v sinovou řadu. Načrtněte graf součtu této řady. (12+5 bodů)

Příklad 5 : (Každá z otázek (a) až (e) za 1 bod.)

(a) Napište příklad spojité funkce na intervalu $(1,2)$, která nemá Newtonův integrál přes $(1,2)$.

(b) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na intervalu $(0,1)$. Musí platit $f_n^2 \rightrightarrows f^2$ na $(0,1)$? Pokud ne, uveďte příklad.

(c) Existuje po částech spojitá 2π-periodická funkce, jejíž Fourierova řada je $13 + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\sin nx}{n^3})$? Zdůvodněte.

(d) Existuje otevřená podmnožina $\mathbf{R}^2$, jejíž hranice je $\{(0,0),(1,1)\}$? Pokud ano, uveďte příklad.

(e) Nechť A, B jsou podmnožiny $\mathbf{R}$ a $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zobrazení, které je spojité na množině A i na množině B. Musí být spojité na množině $A \cup B$? Pokud ne, uveďte příklad.