Výsledky písemky z Matematické analýzy II pro informatiky (E)

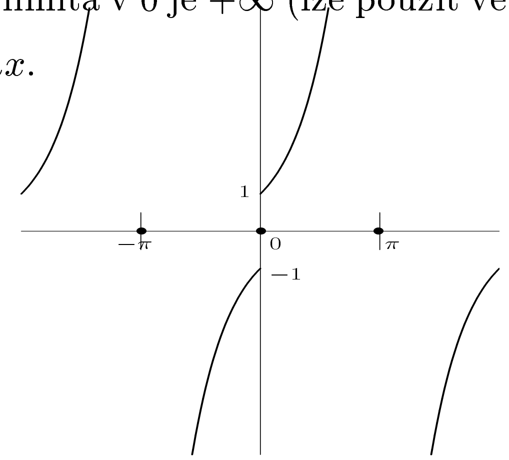
LS 2003-2004, kruhy 31-36 a 43-46

Příklad 1: $\frac{1}{8}\frac{1}{(1+\sqrt{\frac{x}{x+1}})^2} + \frac{1}{8}\frac{1}{(\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1)^2} + \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1} - \frac{3}{8}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{x}{x+1}}} + C$ na $(0,+\infty)$.
Lze použít substituci $y = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$.

Příklad 2: Na $(-\infty,0)$ a $(1,+\infty)$ je $f_n \to 0$, v bodech 0 a 1 je $f_n \to 1$, na $(0,1)$ posloupnost $\{f_n\}$ nekonverguje. Konvergence je stejnoměrná na intervalech $(-\infty,-\varepsilon\rangle$ a $\langle 1+\varepsilon,+\infty)$ pro $\varepsilon > 0$, není stejnoměrná na intervalech $(-\varepsilon,0)$, $(1,1+\varepsilon)$ pro $\varepsilon > 0$.

Příklad 3: $D_f = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$, f je spojitá v každém bodě D_f. (Řada konverguje stejnoměrně na $(c,+\infty)$ a $(-\infty,c)$ pro $c > 0$.) Limita v $+\infty$ i v $-\infty$ je 1 (lze použít větu o záměně limit), limita v 0 je $+\infty$ (lze použít větu o policajtech).

Příklad 4: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n(1-(-1)^n e^{\pi})}{(n^2+1)\pi} \sin nx$.



Příklad 5: (a) Například $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$. (b) NE. Například $u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$.
(c) NE. Je to po částech hladká funkce, a tak její Fourierova řada má v bodě 0 součet $-\frac{1}{2}$ a nikoli 0. (d) NE. Například $A = \mathbf{Q}$. (e) ANO. $\mathbf{R}$ je úplný a $\mathbf{Z}$ je jeho uzavřená podmnožina.