Písemná zkouška z Matematické analýzy II pro informatiky (E)

LS 2003-2004, kruhy 31–36 a 43–46

Příklad 1 : Spočtěte primitivní funkci

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

na maximálních intervalech, kde existuje. (17 bodů)

Příklad 2 : Na kterých intervalech konverguje stejnoměrně posloupnost funkcí

$$f_n(x) = e^{n(x-x^2)} \ ? \qquad \text{(13 bodů)}$$

Příklad 3 : Pro funkci $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2+1}{2^n x^2 + 1}$ určete definiční obor, obor spojitosti, limity v 0, v $+\infty$ a v $-\infty$.

(13 bodů)

Příklad 4 : Rozviňte funkci

$$e^x, \qquad x \in (0, \pi)$$

v sinovou řadu. Načrtněte graf součtu této řady. (12+5 bodů)

Příklad 5 : (Každá z otázek (a) až (e) za 1 bod.)

(a) Napište příklad funkce f, pro kterou existuje $(N)\int_1^2 f$, ale neexistuje Riemannův integrál přes $\langle 1, 2\rangle$.

(b) Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ konverguje stejnoměrně na $\mathbf{R}$. Musí pak konvergovat řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(n)$? Pokud ne, uveďte příklad.

(c) Je funkce $[x]$, $x \in (-\pi, \pi)$ v každém bodě součtem své Fourierovy řady? Zdůvodněte.

(d) Nechť $A \subset \mathbf{R}$. Musí být $\operatorname{int} \overline{A} = \operatorname{int} A$? Pokud ne, uveďte příklad.

(e) Je prostor $\mathbf{Z}$ (tj. množina celých čísel uvažovaná jako podprostor $\mathbf{R}$) úplný? Zdůvodněte.