Písemná zkouška z Matematické analýzy II pro informatiky (F)

LS 2003-2004, kruhy 31–36 a 43–46

Příklad 1 : Spočtěte primitivní funkci

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin x(1-\cos x)}\,\mathrm{d}x$$

na maximálních intervalech, kde existuje. (17 bodů)

Příklad 2 : Na kterých intervalech konverguje stejnoměrně posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \left|\cos\frac{x}{n}\right|^n \ ? \qquad \text{(13 bodů)}$$

Příklad 3 : Spočtěte $\displaystyle\int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \cdot \cos x}{n^3 - n + 1}$.

(13 bodů)

Příklad 4 : Rozviňte funkci

$$\cos\frac{x}{2}, \qquad x \in (0, 2\pi)$$

ve Fourierovu řadu. Načrtněte graf součtu této řady. (12+5 bodů)

Příklad 5 : (Každá z otázek (a) až (e) za 1 bod.)

(a) Napište příklad funkcí f, g omezených na $\langle 3, 7\rangle$, pro které $\overline{\int_3^7}(f+g) \neq \overline{\int_3^7} f + \overline{\int_3^7} g$.

(b) Napište příklad mocninné řady, která konverguje jen v bodě 5.

(c) Napište příklad spojité periodické po částech hladké funkce, která nemá derivaci v bodě 0.

(d) Musí být sjednocení nekonečně mnoha uzavřených podmnožin $\mathbf{R}$ uzavřená množina? Pokud ne, uveďte příklad.

(e) Nechť A je podmnožina metrického prostoru a $x \in \overline{A}$. Musí existovat prostá posloupnost $\{x_n\}$ prvků A, pro kterou $x_n \to x$? Pokud ne, uveďte příklad.