Písemná zkouška z Matematiky II pro FSV (E)

LS 2010-2011

Příklad 1 : Najděte všechna řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pro uvedenou matici $\mathbb{A}$ a uvedené tři vektory pravých stran $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ a $\mathbf{b}_3$:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete a nakreslete definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{y + \sqrt{x}},$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici funkce, jejímž grafem je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $[4, 7, f(4,7)]$. (10 bodů)

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$4\,\mathrm{arctg}(x^2 y) + \sin(\pi x^2 y) = \pi$$

určuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě 1. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá.

$$f(x,y,z) = x^2 + 3y^2, \quad M = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : z^2 - y + 1 \le 0, 3x^2 + z^2 = 4\right\} \qquad \text{(18 bodů)}$$

Příklad 5 : Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje.

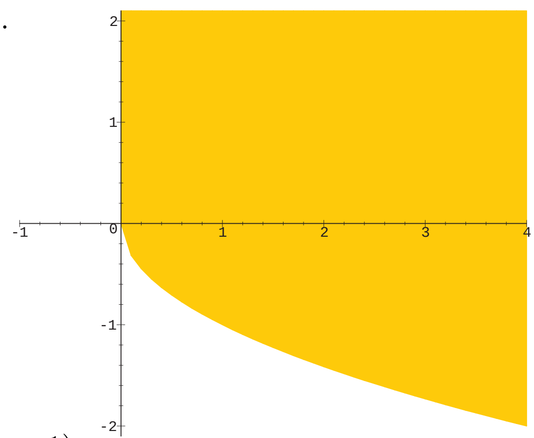
$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 16} - n\right) \qquad \text{(12 bodů)}$$

Výsledky písemky z Matematiky II pro FSV (E)

LS 2010-2011

Příklad 1: Pro $\mathbf{b}_1$: $[-1-4t, 3+6t, -1-4t, t]$, $t \in \mathbf{R}$. Pro $\mathbf{b}_2$: $[4-4t, -3+6t, 1-4t, t]$, $t \in \mathbf{R}$. Pro $\mathbf{b}_3$ nemá řešení.

Příklad 2: $D_f = \{[x,y] : x \ge 0, y \ge -\sqrt{x}\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{y+\sqrt{x}}}$ pro $x > 0$ a $y > -\sqrt{x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y+\sqrt{x}}}$ pro $x \ge 0$ a $y > -\sqrt{x}$. Zbylé parciální derivace (tj. $\frac{\partial f}{\partial x}$ v bodech $[0,y]$, $y \ge 0$, a v bodech $[x, -\sqrt{x}]$, $x \ge 0$; a $\frac{\partial f}{\partial y}$ v bodech $[x, -\sqrt{x}]$, $x \ge 0$) nemá smysl počítat, protože funkce není definovaná na žádné úsečce příslušného směru. Tečná rovina: $z = 3 + \frac{1}{24}(x-4) + \frac{1}{6}(y-7)$.
Definiční obor:



Příklad 3: $f'(1) = -2$, $f''(1) = 6$, rovnice tečny je $y = 1 - 2(x-1)$.

Příklad 4: Maximum ani supremum f na M nenabývá, protože není na M shora omezená – například $[0,y,2] \in M$ pro $y \ge 5$ a $\lim_{y\to+\infty} f(0,y,2) = +\infty$. Minimum je $\frac{13}{3}$ v bodech $[\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, 1, 0]$. Že to je skutečně minimum plyne z toho, že například $\{[x,y,z] \in M : f(x,y,z) \le 20\}$ je kompaktní.

Příklad 5: Diverguje. Řada má záporné členy (pro $n > 5$), pro řadu opačných hodnot lze použít limitní srovnávací kritérium a srovnat s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.