Písemná zkouška z Matematiky III pro IES FSV UK (A)
ZS 2011-2012

Příklad 1 : Najděte primitivní funkci (včetně určení intervalů existence)

$$\int \frac{1+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{1-\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}}\,\mathrm{d}x. \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 2 : Nechť Q je kvadratická forma reprezentovaná maticí $\mathbb{A}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -50 & 10 & 10 & 15 \\ 10 & -12 & 8 & -3 \\ 10 & 8 & -72 & 27 \\ 15 & -3 & 27 & -32 \end{pmatrix}.$$

Určete povahu formy B (je-li PD, ND, PSD, NSD, ID) a spočtěte $Q\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. (12 bodů)

Příklad 3 : Určete vlastní čísla matice $\mathbb{B}$ a všechny jim příslušné vlastní vektory.

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 4 & 25 & 25 \\ 0 & -15 & -18 \\ -1 & 11 & 14 \end{pmatrix} \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 4 : Spočtěte limitu (například s využitím Taylorova polynomu):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x\sin x) - \exp(x\sin x) + \cos(x\sin x))}{\sin^4 x} \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 5 : Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f v množině M, kde

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2} - y^2\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{4} + y\right), \quad M = \mathbf{R}^2. \qquad \text{(12 bodů)}$$

Výsledky písemky z Matematiky III pro IES FSV UK (A)
ZS 2011-2012

Příklad 1: (až na konstantu) $-\frac{1}{2\left(\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}-1\right)^2} - \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}-1} - \frac{3}{4}\log\left|\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}-1\right| - \frac{1}{2\left(\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}+1\right)} - \frac{1}{4}\log\left(\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}+1\right) + \frac{1}{2}\log\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1\right) - \operatorname{arctg}\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}$ na každém z intervalů $(-\infty,-1)$ a $(1,+\infty)$. Lze použít substituci $y = \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}$.
Příklad 2: ND, -52.
Příklad 3: Vlastní čísla 3, $3i$, $-3i$, všechna násobnosti 1; vlastní vektory k číslu 3: $[0,-t,t]$, $t \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$; k $3i$: $t\cdot[17-6i,-15+3i,13]$, $t\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$; k $-3i$: $t\cdot[17+6i,-15-3i,13]$, $t\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$.
Příklad 4: $-\frac{3}{2}$
Příklad 5: Ostré lokální maximum v bodě $[4,-1]$. (Sedlový bod $[-4,-1]$.)