Písemná zkouška z Matematiky III pro IES FSV UK (C)
ZS 2011-2012

Příklad 1 : Spočtěte integrál
$$\int_{-\pi}^{3\pi} \frac{1-\sin x}{3-\cos x}\,\mathrm{d}x. \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 2 : Nechť Q je kvadratická forma reprezentovaná maticí $\mathbb{A}$, kde
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -6 & -14 & -4 & -5 \\ -14 & -51 & -13 & -5 \\ -4 & -13 & -5 & -2 \\ -5 & -5 & -2 & -10 \end{pmatrix}.$$

Určete povahu formy Q (je-li PD, ND, PSD, NSD, ID) a spočtěte $Q\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$. (12 bodů)

Příklad 3 : Určete vlastní čísla matice $\mathbb{B}$ a všechny jim příslušné vlastní vektory.
$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -1 & -35 & -5 \\ -1 & -3 & -1 \\ 6 & 42 & 10 \end{pmatrix} \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 4 : Spočtěte limitu (například s využitím Taylorova polynomu):
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{(x\sin x)} - \cos(\sin x) + 3\cos x - 3\cos(x^2)}{\sin^4 x} \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 5 : Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f v množině M, kde
$$f(x,y) = \log(x^2-y) + \operatorname{arctg}\left(x - \frac{y}{4}\right), \quad M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2 : y < x^2\}. \qquad \text{(12 bodů)}$$

– –

Výsledky písemky z Matematiky III pro IES FSV UK (C)
ZS 2011-2012

Příklad 1: $\pi\sqrt{2}$. Integrál je dvojnásobkem integrálu přes $(-\pi,\pi)$. Na tomto intervalu lze použít substituci $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ a tím integrál převést na integrál z racionální funkce.
Příklad 2: ND, -19.
Příklad 3: Vlastní čísla: 4 násobnosti 2, -2 násobnosti 1. Vlastní vektory k číslu 4: $[-7s-t, s, t]$, $[s,t] \in \mathbf{C}^2 \setminus \{[0,0]\}$; k číslu -2: $t \cdot [-\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, 1]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.
Příklad 4: $\frac{7}{4}$
Příklad 5: Nemá lokální extrémy ani stacionární body. (Při výpočtu stacionárních bodů vyjdou body $[2,8]$ a $[2,12]$, které však neleží v množině M ani v definičním oboru funkce f.)