Písemná zkouška z Matematiky III pro IES FSV UK (E)
ZS 2011-2012

Příklad 1 : Spočtěte integrál
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 x \sin x}{5 - \sin^2 x}\,\mathrm{d}x. \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 2 : Nechť Q je kvadratická forma reprezentovaná maticí $\mathbb{A}$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 4 & 1 \\ 12 & 50 & 14 & 2 \\ 4 & 14 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Určete povahu formy Q (je-li PD, ND, PSD, NSD, ID) a spočtěte $Q\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. (12 bodů)

Příklad 3 : Určete vlastní čísla matice $\mathbb{B}$ a všechny jim příslušné vlastní vektory.

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 6 & 14 & 14 \\ -2 & -2 & -4 \\ 2 & 11 & 13 \end{pmatrix} \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 4 : Spočtěte limitu (například s využitím Taylorova polynomu):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2\sin x) - 2\sin(\sin x) + \sin^3 x}{x(1 - \cos(x^2))} \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad 5 : Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f v množině M, kde

$$f(x, y) = (x + 2y)^{(x^2 - y^2)}, \quad M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2 : x + 2y > 0\}. \qquad \text{(12 bodů)}$$

– –

Výsledky písemky z Matematiky III pro IES FSV UK (E)
ZS 2011-2012

Příklad 1: $\frac{3}{8} - \log\frac{400}{289}$. Lze použít substituci $y = \cos x$ nebo $y = \sin x$, případně i $y = \cos^2 x$ nebo $y = \sin^2 x$.
Příklad 2: PSD, nikoli PD; 84.
Příklad 3: Vlastní čísla 2, 6, 9, všechna násobnosti 1. Vlastní vektory k číslu 2: $t \cdot [0, -1, 1]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$; k číslu 6: $t \cdot [2, -1, 1]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$; k číslu 9: $t \cdot [\frac{98}{61}, -\frac{40}{61}, 1]$, $t \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.
Příklad 4: $\frac{1}{2}$
Příklad 5: Ostré lokální maximum v bodě $[-\frac{1}{3\sqrt{e}}, \frac{2}{3\sqrt{e}}]$. (Sedlové body $[-1, 1]$ a $[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.)