Početní písemná část z Matematiky II (A) pro IES FSV UK

Letní semestr 2019/2020

Příklad 1: Najděte všechna řešení soustavy $\mathbb{A}.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ pro níže uvedenou matici $\mathbb{A}$ a pro tři uvedené vektory pravých stran:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 8 & 2 \\ 8 & 1 & 8 & 2 \\ 8 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 4 & 194 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b_3} = \begin{pmatrix} 37 \\ 44 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(8 bodů)}$$

Příklad 2: Určete a načrtněte definiční obor funkce

$$f(x,y) = \sqrt{y^2 - \arcsin x},$$

spočtěte její parciální derivace podle všech proměnných všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[0,1,f(0,1)]$. (9 bodů)

Příklad 3: Dokažte, že rovnice

$$\arccos(\log x + \log y) = 3 \arcsin \frac{x+y}{4}$$

určuje v nějakém okolí bodu $[1,1]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[1, f(1)]$. (8 bodů)

Příklad 4: Najděte supremum a infimum funkce f na množině M a zjistěte, zda f těchto hodnot na M nabývá, pokud

$$f(x,y,z) = x - y^2, M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 5, (x+z)^2 + 2y^2 = 2\}.$$

(15 bodů)

Příklad 5: Zjistěte, zda následující řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně nebo diverguje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2 \operatorname{arctg} n + \operatorname{arctg} \frac{1}{n}}{\pi} \right)^{n(n+2)} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Výsledky

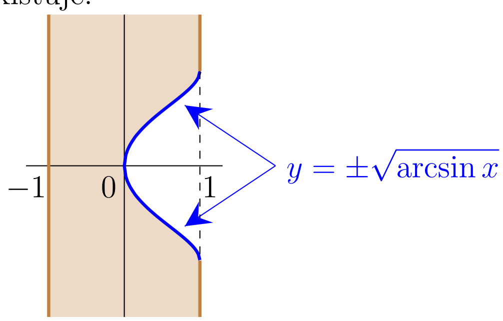
Příklad 1: Pro $\boldsymbol{b}_2$ nemá řešení. Pro $\boldsymbol{b}_1$ nekonečně mnoho řešení ve tvaru $[0, 1-62t, t, -1+27t]$, $t \in \mathbb{R}$. Pro $\boldsymbol{b}_3$ nekonečně mnoho řešení ve tvaru $[7, 4-62t, t, -8+27t]$, $t \in \mathbb{R}$.

Příklad 2:

$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \in \langle -1, 0\rangle$ nebo $x \in (0,1\rangle$ a $y \in (-\infty, -\sqrt{\arcsin x}\rangle \cup \langle \sqrt{\arcsin x}, +\infty)\}$ (obrázek viz níže, hranice patří do D_f). $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{2\sqrt{y^2 - \arcsin x}\cdot\sqrt{1-x^2}}$ pokud $x \in (-1,1)$ a $y^2 > \arcsin x$ (tj. na vnitřku D_f). $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{y^2-\arcsin x}}$, pokud $x \in \langle -1, 1\rangle$ a $y^2 > \arcsin x$ (tj. na D_f bez modré křivky vpravo).

$\frac{\partial f}{\partial x}$ v hraničních bodech nemá smysl počítat (D_f neobsahuje vodorovnou úsečku kolem takových bodů).

$\frac{\partial f}{\partial y}$ má z vynechaných bodů smysl počítat jen v bodě $[0,0]$ (v ostatních případech D_f neobsahuje svislou úsečku kolem příslušného bodu). $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neexistuje.



Příklad 3: $f'(1) = -1$, $f''(1) = \frac{4}{2+\sqrt{3}}$. Rovnice tečny: $y = 1 - 1\cdot(x-1)$ (tj. $y = 2-x$).

Příklad 4: Maximum $\sqrt{5}$ v bodech $[\sqrt{5}, 0, \pm\sqrt{2-\sqrt{5}}]$, minimum -3 v bodech $[-2, 1, 2]$ a $[-2, -1, 2]$.

Příklad 5: Řada konverguje absolutně. (Podle odmocninového kritéria, $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = e^{-1/\pi}$.)