Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

Jméno a příjmení: ______________________ Cvičící: ______________________

Příklad	1	2	3	4	**Body**
Maximum bodů	4	7	6	13	30
Získané body					

[4] 1. Pro které $m, n \in \mathbb{N}$ existuje **vlastní** a **nenulová** limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x^n} - e}{x^m} = L \neq 0.$$

Určete L.

Řešení:

Limitu si přepíšeme

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x^n} - e}{x^m} = -\lim_{x\to 0} e \frac{e^{\cos x^n - 1} - 1}{\cos x^n - 1} \frac{1 - \cos x^n}{x^{2n}} \frac{x^{2n}}{x^m}$$

Nyní použijeme známé limity (a věty o substituci)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x^n - 1} - 1}{\cos x^n - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x^n}{x^{2n}} = \lim_{y\to 0} \frac{1 - \cos y}{y^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{2n}}{x^m} = \begin{cases} 0 & \text{pro } m < 2n, \\ 1 & \text{pro } m = 2n, \\ \infty & \text{pro } m > 2n \text{ a } m \text{ sudé}, \\ \text{neexistuje} & \text{pro } m > 2n \text{ a } m \text{ liché} \end{cases}$$

Použitím vět o limitě součinu tedy dostáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x^n} - e}{x^m} = -e \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^{2n}}{x^m}.$$

Vidíme tedy, že limita existuje a je nenulová pouze pro $2n = m$ a $L = -\frac{e}{2}$.

[7] 2. Uvažujte rekurentně zadanou posloupnost

$$a_0 \in \mathbb{R},$$
$$a_{n+1} := a_n^2 - 2a_n + 2.$$

V závislosti na a_0 určete, kdy existuje

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Uvažujte případně i nevlastní limitu $L \in \mathbb{R}^*$.

Řešení:

Nejdříve si určíme možné hodnoty vlastní limity L. Pokud tedy existuje $L \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L,$$

pak musí platit

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n^2 - 2a_n + 2 = L^2 - 2L + 2.$$

Hodnoty splňující výše uvedenou rovnost jsou

$$L = \begin{cases} 1, \\ 2. \end{cases}$$

Nejdříve si můžeme všimnout, že

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2 = (a_n - 1)^2 + 1 \geq 1.$$

Vidíme tedy, že posloupnost bude omezená zdola. Navíc od druhého členu bude platit $a_n \geq 1$ pro $n > 1$.

Mohou tedy nastat celkem čtyři případy a to:

- limita neexistuje
- limita je rovna ∞
- limita je rovna 1
- limita je rovna 2

Z přednášky víme, že monotónní posloupnost má vždy limitu, která je vlastní v případě, že posloupnost je omezená. zkusíme tedy ověřit monotonii.

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2 \leq a_n \quad \Leftrightarrow (a_n - 1)(a_n - 2) \leq 0$$

a tedy vidíme, že (soustředíme se pouze na $a_n \geq 1$, neboť z prvního kroku už víme, že od $n = 2$ už platí, $a_n \geq 1$)

$$a_n \in (1, 2) \implies 1 \leq a_{n+1} \leq a_n,$$
$$a_n \in (2, \infty) \implies a_{n+1} \geq a_n.$$

Tedy, pokud $a_0 \in [1, 2)$, posloupnost je klesající a omezená zdola jedničkou. Musí mít tedy vlastní limitu a z výše spočteného platí $L = 1$. Pokud $a_0 = 2$, pak triviálně platí $L = 2$. Pokud $a_0 > 2$, vidíme, že posloupnost je neklesající. Musí mít tedy limitu (možno i nevlastní). Protože jediný kandidát na vlastní limitu je $L = 2$ a my víme, že $a_n \geq a_0 > 2$, této limity se nemůže nabýt a platí $L = \infty$.

Zbývá ošetřit případ, kdy $a_0 < 1$. K tomu ale využijeme výše spočítaného aplikovaného na druhý člen posloupnosti a_1.

$$a_1 < 2 \Leftrightarrow a_0^2 - 2a_0 + 2 < 2 \Leftrightarrow a_0(a_0 - 2) < 0 \Leftrightarrow a_0 \in (0, 2).$$

Aplikováním stejného postupu získáme

$$L = \begin{cases} 1 & \text{pro } a_0 \in (0, 2), \\ 2 & \text{pro } a_0 = 0 \text{ nebo } a_0 = 2, \\ \infty & \text{jinak.} \end{cases}$$

[6] 3. Na **maximálním intervalu** najděte **primitivní** funkci

$$F := \int e^{2x} |\sin x| \, dx$$

Řešení:

Vidíme, že integrand je spojitá funkce na $\mathbb{R}$ a tedy primitivní funkce bude existovat na celém $\mathbb{R}$. Začneme nejdříve s určením primitivní funkce pro

$$\int e^{2x} \sin x \, dx.$$

Použitím dvakrát integrace per partes získáme

$$\int e^{2x} \sin x \, dx \overset{\substack{u = e^{2x},\ u' = 2e^{2x} \\ v' = \sin x,\ v = -\cos x}}{=} -\cos x e^{2x} + 2 \int e^{2x} \cos x \, dx$$
$$\overset{\substack{u = e^{2x},\ u' = 2e^{2x} \\ v' = \cos x,\ v = \sin x}}{=} -\cos x e^{2x} + 2 \sin x e^{2x} - 4 \int e^{2x} \sin x \, dx.$$

Jednoduchou úpravou získáme

$$\int e^{2x} \sin x \, dx = e^{2x} \frac{2 \sin x - \cos x}{5} + C$$

Nyní se vrátíme k původnímu integrálu. Protože $\sin x \geq 0$ pouze na intervalech $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ dostaneme

$$F(x) = \begin{cases} \int e^{2x} \sin x \, dx = e^{2x} \dfrac{2 \sin x - \cos x}{5} + C_k & \text{na } (2k\pi, (2k+1)\pi), \\ -\int e^{2x} \sin x \, dx = -e^{2x} \dfrac{2 \sin x - \cos x}{5} + D_k & \text{na } (2(k+1)\pi, (2k+2)\pi). \end{cases}$$

Zbývají nám určit konstanty C_k, D_k. Ty určíme z podmínky na spojitost F. Musí platit

$$e^{2(2k+1)\pi} \frac{1}{5} + C_k = \lim_{x \to (2k+1)\pi_-} F(x) = \lim_{x \to (2k+1)\pi_+} F(x) = -e^{2(2k+1)\pi} \frac{1}{5} + D_k,$$
$$-e^{4k\pi} \frac{1}{5} + C_k = \lim_{x \to 2k\pi_+} F(x) = \lim_{x \to 2k\pi_-} F(x) = e^{4k\pi} \frac{1}{5} + D_{k-1}.$$

Pro libovolně zvolené C_0, tak získáme rekurentní formule

$$D_k := \frac{2e^{2(2k+1)\pi}}{5} + C_k, \qquad C_{k+1} := \frac{2e^{4(k+1)\pi}}{5} + D_k.$$

[13] 4. Vyšetřete průběh funkce (definiční obor D_f, intervaly spojitosti, limity v krajních bodech D_f, průsečíky s osami, intervaly monotónie, lokální a globální extrémy, obor hodnot H_f, limity derivací v krajních bodech $D_{f'}$, intervaly konvexity/konkávity funkce f, inflexní body, asymptoty, detailní graf)

$$f(x) := \frac{|x|}{\sqrt{3}} + \sqrt{1 - (||x| - 2| - 1)^2}.$$

Nápověda: Díky struktuře funkce f, je možná vhodné se soustředit na vyšetřování průběhu funkce na intervalech $(0, 2)$ a $(2, 4)$.

Řešení:

Definiční obor druhé odmocniny jsou nezáporná čísla, proto musíme ověřit kdy

$$1 - (||x| - 2| - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow |||x| - 2| - 1| \leq 1 \Leftrightarrow ||x| - 2| \leq 2 \Leftrightarrow |x| \leq 4.$$

Vidíme tedy, že $D_f = [-4, 4]$. Funkce je spojitá na svém definičním oboru. Funkce je evidentně nezáporná. Funkce je sudá. Platí

$$f(0) = 0, \qquad f(\pm 4) = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Funkce má tedy v bodě $x = 0$ globální minimum rovno $f(0) = 0$.

Spočteme první derivaci:

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{\sqrt{3}} - \frac{||x| - 2| - 1}{\sqrt{1 - (||x| - 2| - 1)^2}} \operatorname{sign}(|x| - 2) \operatorname{sign} x$$

Vidíme tedy, že $D_{f'} = (-4, 4) \setminus \{\pm 2, 0\}$ a že derivace je spojitá na svém definičním oboru. Pro limity v krajních bodech dostaneme

$$\infty = \lim_{x \to 0_+} f'(x) = \lim_{x \to 2_+} f'(x) = \lim_{x \to -2_+} f'(x) = \lim_{x \to -4_+} f'(x),$$
$$-\infty = \lim_{x \to 0_-} f'(x) = \lim_{x \to 2_-} f'(x) = \lim_{x \to -2_-} f'(x) = \lim_{x \to 4_-} f'(x),$$

Nyní najdeme nulové body derivace. Pokud $f'(x) = 0$, pak nutně

$$\begin{aligned}
&\frac{\operatorname{sign} x}{\sqrt{3}} - \frac{||x| - 2| - 1}{\sqrt{1 - (||x| - 2| - 1)^2}} \operatorname{sign}(|x| - 2) \operatorname{sign} x = 0 \\
&\implies \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{||x| - 2| - 1}{\sqrt{1 - (||x| - 2| - 1)^2}} \operatorname{sign}(|x| - 2) \\
&\implies \frac{1}{3} = \frac{(||x| - 2| - 1)^2}{1 - (||x| - 2| - 1)^2} \\
&\implies \frac{1}{4} = (||x| - 2| - 1)^2 \implies |||x| - 2| - 1| = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Tato úloha má celkem osm kořenů a to $\{\pm\frac{7}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}\}$. V průběhu řešení jsme používali neekvivalentní úpravy. Zpětným dosazením do původní rovnice dostaneme, že řešením úlohy $f'(x) = 0$ jsou pouze body $\{\pm\frac{7}{2}, \pm\frac{3}{2}\}$. Nyní už můžeme snadno určit znaménko derivace:

$$
\begin{aligned}
f'(x) > 0 \quad & \text{pro } x \in (-4, -\frac{7}{2}) \cup (-2, -\frac{3}{2}) \cup (0, \frac{3}{2}) \cup (2, \frac{7}{2}), \\
f'(x) < 0 \quad & \text{pro } x \in (-\frac{7}{2}, -2) \cup (-\frac{3}{2}, 0) \cup (\frac{3}{2}, 2) \cup (2, 4).
\end{aligned}
$$

Funkce je tedy rostocí na intervalech, kde je derivace kladná a naopak klesající na intervalech, kde je derivace záporná. V bodech $\{\pm 4, \pm 2, 0\}$ má funkce lokální minima, přičemž v nule je minimum globální. V bodech $\{\pm\frac{7}{2}, \pm\frac{3}{2}\}$ má funkce lokální maxima. Protože funkce je spojitá na $[-4, 4]$ musí mít globální maximum. Toho se tedy může nabývat pouze v bodech $\{\pm\frac{7}{2}, \pm\frac{3}{2}\}$. Výpočtem dostaneme

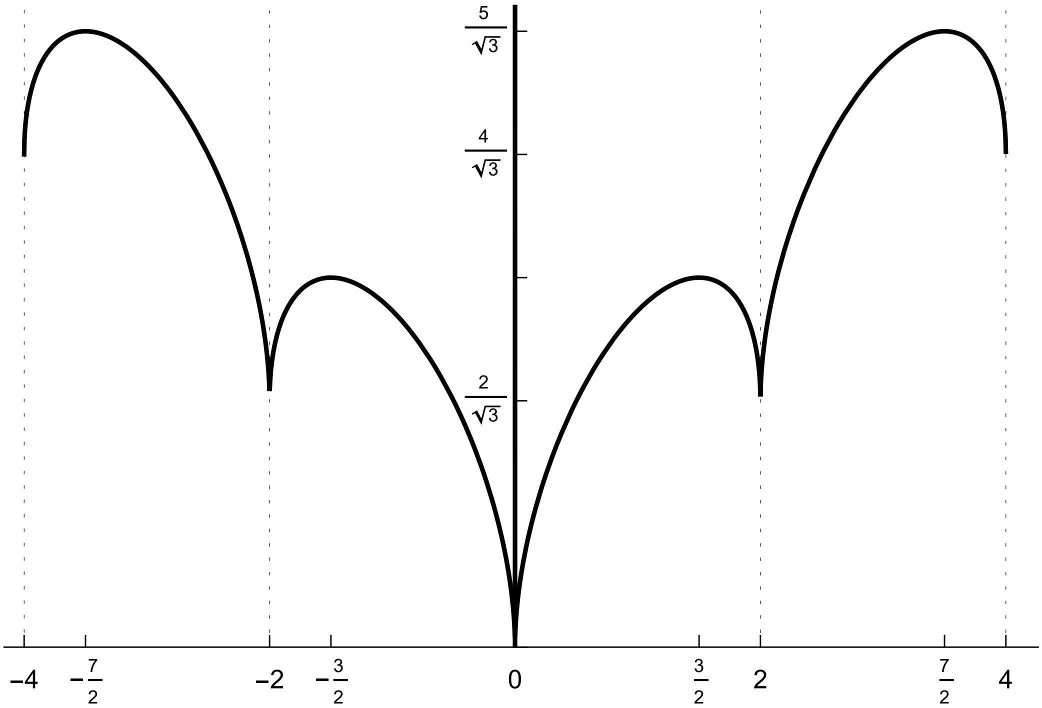
$$
f(\pm\frac{3}{2}) = \sqrt{3}, \qquad f(\pm\frac{7}{2}) = \frac{5\sqrt{3}}{3}
$$

Globálního maxima se tedy nabývá v bodech $\pm\frac{7}{2}$.

Nyní se budeme věnovat druhé derivaci

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{\operatorname{sign} x}{\sqrt{3}} - \frac{||x| - 2| - 1}{\sqrt{1 - (||x| - 2| - 1)^2}} \operatorname{sign}(|x| - 2) \operatorname{sign} x \right)' \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1 - (||x| - 2| - 1)^2}} - \frac{(||x| - 2| - 1)^2}{(1 - (||x| - 2| - 1)^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Definiční obor f'' je sthodný s $D_{f'}$. Ihned je vidět, že $f''(x) < 0$ ve všech bodech, kde f'' existuje. Funkce je tedy konkávní na intervalech $(-4, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$ a $(2, 4)$. Žádný bode není inflexní.



Obrázek 1: Graf funkce f