Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

Jméno a příjmení: ______________________ Cvičící: ______________________

Příklad	1	2	3	4	**Body**
Maximum bodů	4	6	12	8	30
Získané body					

[4] 1. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{4^{3^x} - 3^{4^x} - \cos x - \ln(3+x)\ln(4+x)\sin x}{x^2}.$$

Řešení:

Jde o limitu $\frac{0}{0}$. Limitu spočítáme použitím l'Hopitalova pravidla (použitého dvakrát). To vše za předpokladu, že limity vpravo existují, což nakonec ukážeme.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{4^{3^x} - 3^{4^x} - \cos x - \ln(3+x)\ln(4+x)\sin x}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(4^{3^x} - 3^{4^x} - \cos x - \ln(3+x)\ln(4+x)\sin x)'}{(x^2)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln 3 \ln 4(4^{3^x}3^x - 3^{4^x}4^x) + \sin x - \ln(3+x)\ln(4+x)\cos x - \frac{\ln(4+x)\sin x}{3+x} - \frac{\ln(3+x)\sin x}{4+x}}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln 3 \ln 4(4^{3^x}3^x - 3^{4^x}4^x) - \ln(3+x)\ln(4+x)\cos x}{2x} \\
&\qquad + \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}\left(1 - \frac{\ln(4+x)}{3+x} - \frac{\ln(3+x)}{4+x}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\ln 3 \ln 4(4^{3^x}3^x - 3^{4^x}4^x) - \ln(3+x)\ln(4+x)\cos x\right)'}{(2x)'} \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\ln 4}{3} - \frac{\ln 3}{4}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(\ln 3\ln 4)^2(4^{3^x}3^{2x} - 3^{4^x}4^{2x}) + \ln 3\ln 4(4^{3^x}3^x \ln 3 - 3^{4^x}4^x\ln 4)}{2} \\
&\qquad - \frac{\frac{\ln(4+x)\cos x}{3+x} + \frac{\ln(3+x)\cos x}{4+x} - \ln(3+x)\ln(4+x)\sin x}{2} \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\ln 4}{3} - \frac{\ln 3}{4}\right) \\
&= \frac{(\ln 3\ln 4)^2 + \ln 3\ln 4(4\ln 3 - 3\ln 4)}{2} - \frac{\ln 4}{3} - \frac{\ln 3}{4} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

[6] 2. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x-x^2} - \cos x - 5\sin x + 4x)^2}{x^{10}}$$

Řešení:

Limitu budeme řešit pomocí Taylorova rozvoje známých funkcí. Použijeme

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5),$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Díky rozvoji

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{y^5}{5!} + o(y^5)$$

a po zavolení $y := x - x^2$ získáme

$$\begin{aligned} e^{x-x^2} &= 1 + x - x^2 + \frac{(x-x^2)^2}{2} + \frac{(x-x^2)^3}{3!} + \frac{(x-x^2)^4}{4!} + \frac{(x-x^2)^5}{5!} + o((x-x^2)^5) \\ &= 1 + x - x^2 + \frac{x^2 - 2x^3 + x^4}{2} + \frac{x^3 - 3x^4 + 3x^5}{3!} + \frac{x^4 - 4x^5}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \end{aligned}$$

Přímým dosazením tak získáme

$$\begin{aligned} &e^{x-x^2} - \cos x - 5\sin x + 4x \\ &= 1 + x - x^2 + \frac{x^2 - 2x^3 + x^4}{2} + \frac{x^3 - 3x^4 + 3x^5}{3!} + \frac{x^4 - 4x^5}{4!} + \frac{x^5}{5!} \\ &- 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} - 5x + 5\frac{x^3}{3!} - 5\frac{x^5}{5!} + 4x + o(x^5) \\ &= \frac{3x^5}{10} + o(x^5). \end{aligned}$$

Což vede k

$$(e^{x-x^2} - \cos x - 5\sin x + 4x)^2 = \frac{9x^{10}}{100} + o(x^{10}).$$

Konečně tedy získáváme

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x-x^2} - \cos x - 5\sin x + 4x)^2}{x^{10}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{9x^{10}}{100} + o(x^{10})}{x^{10}} = \lim_{x\to 0} \frac{9}{100} + \frac{o(x^{10})}{x^{10}} = \frac{9}{100}.$$

[12] 3. Na maximálním intervalu nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{dx}{3+2\sqrt{|x^2-6x+5|}}\,dx$$

Řešení:

Vidíme, že integrand je spojitá funkce a tedy na celém $\mathbb{R}$ bude tedy existovat primitivní funkce. Intergál upravíme

$$\int \frac{dx}{3+2\sqrt{|x^2-6x+5|}} = \int \frac{dx}{3+2\sqrt{|(x-1)(x-5)|}} = \int \frac{dx}{3+2|x-5|\sqrt{\frac{|x-1|}{|x-5|}}} := F$$

Uvažujme nyní tři intervaly a to $(-\infty,a)$, (a,b) a (b,∞). Pak máme

$$F = \begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{3+2(5-x)\sqrt{\frac{x-1}{x-5}}} & \text{na } (-\infty,1) \\ \displaystyle\int \frac{dx}{3+2(5-x)\sqrt{\frac{x-1}{5-x}}} & \text{na } (1,5) \\ \displaystyle\int \frac{dx}{3+2(x-5)\sqrt{\frac{x-1}{x-5}}} & \text{na } (5,\infty) \end{cases}$$

Na intervalu $(-\infty,1)$ použijeme substituci

$$t := \sqrt{\frac{x-1}{x-5}} \Leftrightarrow x = \frac{5t^2-1}{t^2-1} \implies dx = \frac{-8t}{(t^2-1)^2}dt, \qquad (-\infty,1) \mapsto (0,1).$$

Na intervalu $(1,5)$ použijeme substituci

$$t := \sqrt{\frac{x-1}{5-x}} \Leftrightarrow x = \frac{5t^2+1}{t^2+1} \implies dx = \frac{8t}{(t^2+1)^2}dt, \qquad (-\infty,1) \mapsto (0,\infty).$$

Na intervalu $(5,\infty)$ použijeme substituci

$$t := \sqrt{\frac{x-1}{x-5}} \Leftrightarrow x = \frac{5t^2-1}{t^2-1} \implies dx = \frac{-8t}{(t^2-1)^2}dt, \qquad (5,\infty) \mapsto (1,\infty).$$

V prvním případě tedy dostaneme (zde uvažujeme $t \in (0,1)$)

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{1}{3+2(5-x)\sqrt{\frac{x-1}{x-5}}}\,dx = -8\int \frac{1}{3-2\frac{4t}{t^2-1}}\;\frac{t}{(t^2-1)^2}dt \\ &= -8\int \frac{1}{3t^2-3-8t}\;\frac{t}{t^2-1}dt = -8\int \frac{1}{(t-3)(3t+1)}\frac{t}{t^2-1}dt \\ &= \int -\frac{3}{10(t-3)} + \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)} + \frac{9}{10(3t+1)}dt \\ &= -\frac{3}{10}\ln|t-3| + \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| + \frac{3}{10}\ln|3t+1| \\ &= -\frac{3}{10}\ln(3-t) + \frac{1}{2}\ln(1-t) - \frac{1}{2}\ln(t+1) + \frac{3}{10}\ln(3t+1) \end{aligned}$$

Po zpětném dosazení tak máme

$$F = -\frac{3}{10}\ln\left(3-\sqrt{\frac{x-1}{x-5}}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1-\sqrt{\frac{x-1}{x-5}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x-5}}+1\right) + \frac{3}{10}\ln\left(3\sqrt{\frac{x-1}{x-5}}+1\right) + C \quad \text{na } (-\infty,1).$$

V druhém případě tedy dostaneme (zde uvažujeme $t \in (0,\infty)$)

$$\begin{aligned}
F &= \int \frac{1}{3+2(5-x)\sqrt{\frac{x-1}{5-x}}}\,dx = \int \frac{1}{3+\frac{8t}{t^2+1}}\frac{8t}{(t^2+1)^2}dt \\
&= \int \frac{1}{3t^2+3+8t}\frac{8t}{t^2+1}dt = \int \frac{8t}{(3t+4+\sqrt{7})(t+(4-\sqrt{7})/3)(t^2+1)}dt \\
&= \int \frac{8t}{(3t+4+\sqrt{7})(t+(4-\sqrt{7})/3)(t^2+1)}dt \\
&= \int -\frac{9}{2\sqrt{7}(3t+4-\sqrt{7})} + \frac{9}{2\sqrt{7}(4+\sqrt{7}+3t)} + \frac{1}{1+t^2}dt \\
&= -\frac{3}{2\sqrt{7}}\ln(3t+4-\sqrt{7}) + \frac{3}{2\sqrt{7}}\ln(4+\sqrt{7}+3t) + \arctan t
\end{aligned}$$

Po zpětném dosazení tak máme

$$F = -\frac{3}{2\sqrt{7}}\ln\left(3\sqrt{\frac{x-1}{5-x}}+4-\sqrt{7}\right) + \frac{3}{2\sqrt{7}}\ln\left(4+\sqrt{7}+3\sqrt{\frac{x-1}{5-x}}\right) + \arctan\sqrt{\frac{x-1}{5-x}} + C_1 \quad \text{na } (1,5).$$

V třetím případě dostaneme (zde uvažujeme $t \in (1,\infty)$)

$$\begin{aligned}
F &= \int \frac{1}{3-2(5-x)\sqrt{\frac{x-1}{x-5}}}\,dx = -8\int \frac{1}{3+2\frac{4t}{t^2-1}}\,\frac{t}{(t^2-1)^2}dt \\
&= -8\int \frac{1}{3t^2-3+8t}\,\frac{t}{t^2-1}dt = -8\int \frac{1}{(t+3)(3t-1)}\frac{t}{t^2-1}dt \\
&= \int -\frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)} - \frac{3}{10(t+3)} + \frac{9}{10(3t-1)}dt \\
&= -\frac{1}{2}\ln(t-1) + \frac{1}{2}\ln(t+1) - \frac{3}{10}\ln(t+3) + \frac{3}{10}\ln(3t-1).
\end{aligned}$$

Po zpětném dosazení tak máme

$$F = -\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x-5}}-1\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x-5}}+1\right) - \frac{3}{10}\ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x-5}}+3\right) + \frac{3}{10}\ln\left(3\sqrt{\frac{x-1}{x-5}}-1\right) + C_2 \quad \text{na } (5,\infty).$$

Zbývá určit hodnoty konstant C_1 a C_2 tak, aby výsledná funkce byla spojitá na $\mathbb{R}$. Spočteme tedy

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1_-} F(x) &= \lim_{x\to 1_-} -\frac{3}{10}\ln\left(3-\sqrt{\frac{x-1}{x-5}}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1-\sqrt{\frac{x-1}{x-5}}\right)\\
&\quad -\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x-5}}+1\right)+\frac{3}{10}\ln\left(3\sqrt{\frac{x-1}{x-5}}+1\right)+C\\
&= -\frac{3}{10}\ln 2 + C.\\
\lim_{x\to 1_+} F(x) &= \lim_{x\to 1_+} -\frac{3}{2\sqrt{7}}\ln\left(3\sqrt{\frac{x-1}{5-x}}+4-\sqrt{7}\right)+\frac{3}{2\sqrt{7}}\ln\left(4+\sqrt{7}+3\sqrt{\frac{x-1}{5-x}}\right)\\
&\quad +\arctan\sqrt{\frac{x-1}{5-x}}+C_1\\
&= \frac{3}{2\sqrt{7}}\ln\frac{4+\sqrt{7}}{4-\sqrt{7}}+C_1\\
\lim_{x\to 5_-} F(x) &= \lim_{x\to 5_-} -\frac{3}{2\sqrt{7}}\ln\left(3\sqrt{\frac{x-1}{5-x}}+4-\sqrt{7}\right)+\frac{3}{2\sqrt{7}}\ln\left(4+\sqrt{7}+3\sqrt{\frac{x-1}{5-x}}\right)\\
&\quad +\arctan\sqrt{\frac{x-1}{5-x}}+C_1\\
&= \frac{\pi}{2}+C_1\\
\lim_{x\to 5_+} F(x) &= \lim_{x\to 5_+} -\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x-5}}-1\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x-5}}+1\right)-\frac{3}{10}\ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x-5}}+3\right)\\
&\quad +\frac{3}{10}\ln\left(3\sqrt{\frac{x-1}{x-5}}-1\right)+C_2\\
&= \frac{3}{10}\ln 3 + C_2.
\end{aligned}$$

Aby F byla spojitá, je potřeba konstanty C_1 a C_2 zvolit takto:

$$\begin{aligned}
C_1 &:= -\frac{3}{2\sqrt{7}}\ln\frac{4+\sqrt{7}}{4-\sqrt{7}}-\frac{3}{10}\ln 2+C\\
C_2 &:= -\frac{3}{10}\ln 3+\frac{\pi}{2}+C_1 = -\frac{3}{10}\ln 3+\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2\sqrt{7}}\ln\frac{4+\sqrt{7}}{4-\sqrt{7}}-\frac{3}{10}\ln 2+C
\end{aligned}$$

[8] 4. Vyšetřete průběh funkce (definiční obor D_f, intervaly spojitosti, limity v krajních bodech D_f, průsečíky s osami, intervaly monotónie, lokální a globální extrémy, obor hodnot f, limity derivací v krajních bodech $D_{f'}$, intervaly konvexity/konkávity funkce f, inflexní body, asymptoty, detailní graf)

$$f(x) := \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}.$$

Řešení:

Díky nezápornosti absolutní hodnoty je definiční obor $D_f = \mathbb{R}$. Absolutní hodnota, odmocnina i polynom jsou spojité funkce a tedy i f bude spojitá na celém definičním oboru. Funkce není ani sudá ani lichá ani periodická. Ihned vidíme, že

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty.$$

Na druhou stranu, díky rozkladu $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$ vidíme, že $f(x) = 0$ pro $x = 1$ a $x = 5$ a $f(x) > 0$ jinak. Ihned tedy dostáváme, že obor hodnot $H_f = [0, \infty)$, že funkce nemá globální maximum a že funkce má globální minimum 0, které se nabývá v bodech $x = 1$ a $x = 5$.

Nyní spočítáme první derivaci

$$f'(x) = \operatorname{sign}(x^2 - 6x + 5)\frac{2x - 6}{\sqrt{|x^2 - 6x + 5|}}.$$

Vidíme, že $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{1, 5\}$. Spočteme limity v krajních bodech

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= -1,\\
\lim_{x\to\infty} f(x) &= 1,\\
\lim_{x\to 1_-} f(x) &= -\infty,\\
\lim_{x\to 1_+} f(x) &= \infty,\\
\lim_{x\to 5_-} f(x) &= -\infty,\\
\lim_{x\to 5_+} f(x) &= +\infty.
\end{aligned}$$

Navíc vidíme, že $f'(x) = 0$ pouze v bodě $x = 3$. Ihned tedy vidíme, že

$$f'(x) > 0 \text{ pro } x \in (1,3) \cup (5,\infty), \qquad f'(x) < 0 \text{ pro } x \in (-\infty,1) \cup (3,5).$$

Vidíme tedy, že f je klesající na intervalech $(-\infty, 1)$ a $(3, 5)$ a rostoucí na intervalech $(1, 3)$ a $(5, \infty)$. V bodech $x = 1$ a $x = 5$ má funkce globální minimum rovno nule a v bodě $x = 3$ má funkce lokální maximum rovno $f(3) = 2$. Asymptoty v bodech $x = 1$ a $x = 5$ jsou přímky $x = 1$ a $x = 5$. Dopočteme ještě asymptoty v $\pm\infty$. Díky spočteným limitám pro derivace v $\pm\infty$ budou asymptoty ve tvaru

$$\begin{aligned}
y_1 &= x + b_1, \text{ kde } b_1 := \lim_{x\to\infty} f(x) - x,\\
y_2 &= -x + b_2, \text{ kde } b_2 := \lim_{x\to-\infty} f(x) + x
\end{aligned}$$

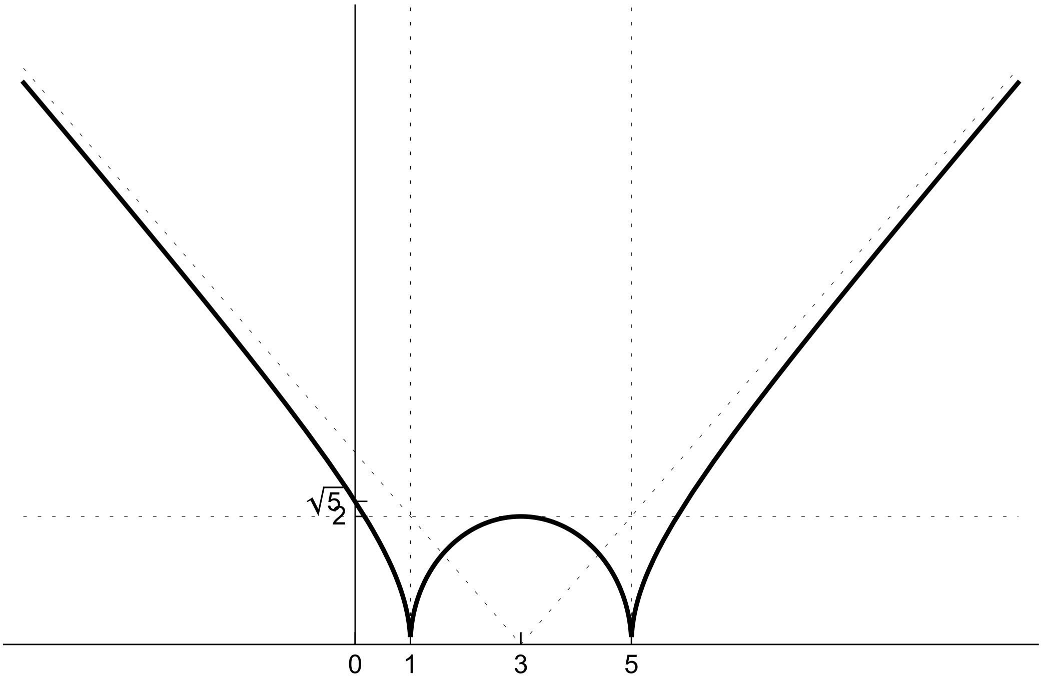
a tedy

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \lim_{x\to\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\infty} \sqrt{|x^2-6x+5|} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{|x^2-6x+5| - x^2}{\sqrt{|x^2-6x+5|}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-6x+5}{\sqrt{|x^2-6x+5|}+x} = -3, \\
b_2 &= \lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{|x^2-6x+5|} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x^2-6x+5| - x^2}{\sqrt{|x^2-6x+5|}-x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-6x+5}{\sqrt{|x^2-6x+5|}-x} = 3.
\end{aligned}
$$

Nakonec spočteme i druhé derivace

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\operatorname{sign}(x^2-6x+5)\frac{2x-6}{\sqrt{|x^2-6x+5|}}\right)' \\
&= \operatorname{sign}(x^2-6x+5)\left(\frac{2}{\sqrt{|x^2-6x+5|}} - \frac{1}{2}\operatorname{sign}(x^2-6x+5)\frac{(2x-6)^2}{\sqrt{|x^2-6x+5|^3}}\right) \\
&= \frac{4(x^2-6x+5)-(2x-6)^2}{2\sqrt{|x^2-6x+5|^3}} = -\frac{16}{2\sqrt{|x^2-6x+5|^3}}
\end{aligned}
$$

a definiční obor je $D_{f''} = \mathbb{R}\setminus\{1,5\}$. Vidíme, že druhá derivace je vždy záporná. Funkce je tedy konkávní na intervalu $(-\infty,1)$, intervalu $(1,5)$ a intervalu $(5,\infty)$. Pozor, **není konkávní** na $\mathbb{R}$



Obrázek 1: Graf funkce f