Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

Jméno a příjmení: ____________________ Cvičící: ____________________

Příklad	1	2	3	4	**Body**
Maximum bodů	4	7	10	9	30
Získané body					

[4] 1. Nalezněte alespoň jeden polynom $P(x)$ tak, aby platilo

$$\tan x = P(x) + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right) \qquad \text{pro } x \to \frac{\pi}{4}.$$

Je tento polynom určen jednoznačně?

Řešení:

Polynom P stačí volit jako Taylorův polynom stupně tři v bodě $x_0 = \pi/4$. Polynom P pak není jednoznačný - stačí přičíst např $(x - \pi/4)^4$ a výsledný polynom opět splňuje zadání. Pro $f(x) = \tan x$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}, f'''(x) = \frac{2\cos^2 x + 6\sin^2}{\cos^4 x}$$

a tedy

$$f(\pi/4) = 1, f'(\pi/4) = 2, f''(\pi/4) = 4, f'''(\pi/4) = 16.$$

Polynom P pak tedy zvolíme

$$\begin{aligned} P(x) &:= f(\pi/4) + f'(\pi/4)(x - \pi/4) + \frac{f''(\pi/4)}{2}(x - \pi/4)^2 + \frac{f'''(\pi/4)}{6}(x - \pi/4)^3 \\ &= 1 + 2(x - \pi/4) + 2(x - \pi/4)^2 + \frac{8}{3}(x - \pi/4)^3 \end{aligned}$$

[7] 2. Uvažujte rekurentně zadanou posloupnost

$$a_0 \in (-\infty, 5] \cup (6, \infty),$$
$$a_{n+1} = \frac{5}{6 - a_n}.$$

V závislosti na a_0 určete, zda existuje $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ a limitu určete. (Uvažujte i nevlatní limitu)

Bonus: Pro skutečně odvážné jedince se nabízejí bonusové body, pokud vyřeší i případ $a_0 \in (5, 6)$. [3] body

Řešení:

Nejdříve si povšimneme, že pokud $a_0 \in (6, \infty)$. potom $a_1 \in (-\infty, 0)$ a stačí tedy studovat posloupnost pouze s počátečním členem $a_0 \in (-\infty, 5]$.

Nejdříve zkusíme spočítat hypotetické limity. Nechť existuje vlastní $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Potom za použití vět o aritmetice limit získáme

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{6 - a_n} = \frac{5}{6 - L}.$$

A tedy získáme rovnici

$$L = \frac{5}{6 - L} \Leftrightarrow L \in \{1, 5\}.$$

Evidentně, pokud $a_0 = 1$, pak $L = 1$ a pokud $a_0 = 5$, pak $L = 5$. Zkoumáme tedy případy kdy $a_0 \in (-\infty, 1) \cup (1, 5)$. Nejdříve ukážeme, že $a_n < 5$ pro každé $n \geq 1$. Důkaz provedeme indukcí. Nechť $a_n < 5$, potom

$$a_{n+1} - 5 = \frac{5}{6 - a_n} - 5 = \frac{5 - 30 + 5a_n}{6 - a_n} = \frac{5(a_n - 5)}{6 - a_n} < 0.$$

Poslunost je tedy zhora omezená 5. Přímo z definice ihned vidíme, že $a_n \geq 0$ pro $n \geq 2$. Posloupnost $\{a_n\}_{n=3}^{\infty} \subset (0, 5)$ je omezená. Nyní ukážeme tyto implikace

$$a_n \in (1, 5) \implies 1 < a_{n+1} < a_n,$$
$$a_n \in (0, 1) \implies a_n < a_{n+1} < 1.$$

A tedy, pokud $a_1 \in (1, 5)$, bude posloupnost klesající, zdola omezená a musí tedy mít limitu, která může být rovna pouze jedné. Pokud $a_1 \in (0, 1)$, potom bude posloupnost rostoucí, shora omezená jedničkou a tedy musí mít limitu, která může být rovna pouze jedné.

Celkem tedy máme. Pokud $a_0 \in (-\infty, 5) \cup (6, \infty)$, pak limita existuje a $L = 1$. Pokud $a_0 = 5$, pak triviálně $L = 5$.

Zbývá ověřit pouze tvrzení o monotonii a omezenosti. Pro $a_n \in (0, 5)$ máme

$$1 < a_{n+1} < a_n \quad \Leftrightarrow \quad 1 < \frac{5}{6 - a_n} < a_n \quad \Leftrightarrow \quad 1 < a_n < 5,$$
$$0 < a_n < a_{n+1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad a_n < \frac{5}{6 - a_n} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < a_n < 1.$$

Bonusová část: Je vidět, že problémy nastanou v případě, kdy pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ nastane $a_n = 6$. Pak člen a_{n+1} není dobře definován. Této situaci musíme tedy zabránit a budeme uvažovat "zpětně"zadanou posloupnost

$$b_n = \frac{5}{6 - b_{n+1}}, \qquad b_0 = 6,$$

což je ekvivalentní zápisu:

$$b_{n+1} = 6 - \frac{5}{b_n}, \qquad b_0 = 6.$$

Pokud tedy nastane případ $a_0 = b_n$ pro nějaké n, potom $a_n = 6$. Definujeme-li

$$S := \mathbb{U}_{n=0}^{\infty}\{b_n\},$$

potom, pokud $a_0 \in S$, pak limita neexistuje, neboť od nějakého n nebude člen a_n definován. Struktura množiny S je "jednoduchá". Posloupnost b_n je klesající, zdola omezená 5. Má tedy limitu a ta je rovna 5. Množina S má tedy jediný hromadný bod pětku.

Nakonec ukážeme, že pokud $a_0 \in (5, 6) \setminus S$, potom

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Z předchozího vidíme, že pokud $a_0 \notin S$, pak pro každé n platí $a_n \neq 6$. Ukážeme, že pokud $a_0 \in (5, 6)$, potom existuje n takové, že $a_n > 6$. Tím pádem se dostáváme do případu řešeného nejdříve a důkaz bude hotov.

Ukážeme, že pokud $a_n \in (b_{i+1}, b_i$ pro nějaké $i \geq 1$, pak $a_{n+1} \in (b_i, b_{i-1})$. Funkce $f(x) := \frac{5}{6-x}$ je na intervalu $(5, 6)$ rostoucí, proto

$$b_{i+1} < a_n < b_i \implies f(b_{i+1}) < f(a_n) < f(b_i) \Leftrightarrow b_i < f(a_{n+1}) < f(b_{i-1}).$$

Pokud tedy $a_0 \in (5, 6) \setminus S$, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $a_0 \in (bn, b_{n-1})$. Induktivní aplkací výše uvedeného tak získáme, že $a_n \in (6 - \frac{5}{6}, 6)$ a tedy

$$a_{n+1} = \frac{5}{6 - a_{n+1}} \geq \frac{5}{6 - (6 - \frac{5}{6})} = 6$$

a tedy můžeme aplikovat postup z kroku 1.

[10] 3. Na maximálním intervalu nalezněte primitivní funkci

$$\int xe^x \sin^4 x \, dx$$

Nápověda: Pro výpočet se mohou hodit vzorce

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Řešení:

Vidíme, že integrand je spojitá funkce a tedy na celém $\mathbb{R}$ bude tedy existovat primitivní funkce.

Označíme $f(x) := e^x \sin^4 x$ a $F(x) := \int f(x) \, dx$ a poté použijeme integraci per partes

$$\int x f(x) \, dx = xF(x) - \int F(x) \, dx.$$

K dokončení úlohy stačí tedy dopočíst F a $\int F(x) \, dx$.

Začneme s výpočtem F. Použijeme vzorce z nápovědy a získáme

$$\begin{aligned} F(x) &= \int e^x \sin^4 x \, dx = \int e^x (\sin^2 x)^2 \, dx = \int e^x \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{8} \int e^x (2 - 4\cos(2x) + 2\cos^2(2x)) \, dx = \frac{1}{8} \int e^x (2 - 4\cos(2x) + 1 + \cos(4x)) \, dx \end{aligned}$$

Vidíme, že potřebujeme spočítat integrál typu $\int e^{ax} \cos(bx) \, dx$. Pro $b = 0$ a $a \neq 0$ ihned vidíme

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a}.$$

Pro $a, b \neq 0$ použijeme dvakrát integraci per partes

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos(bx) \, dx &= \int \left(\frac{e^{ax}}{a} \right)' \cos(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a} \cos(bx) + b \int \frac{e^{ax}}{a} \sin(bx) \, dx \\ &= \frac{e^{ax}}{a} \cos(bx) + \frac{b}{a^2} \int (e^{ax})' \sin(bx) \, dx \\ &= \frac{e^{ax}}{a} \cos(bx) + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos(bx) \, dx. \end{aligned}$$

Převedením integrálu na stejnou stranu získáme

$$\int e^{ax} \cos(bx) \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} \left(ae^{ax} \cos(bx) + be^{ax} \sin(bx) \right).$$

Obdobně můžeme i získat

$$\int e^{ax} \sin(bx) \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} (ae^{ax} \sin(bx) - be^{ax} \cos(bx)).$$

Tyto vzorec nyní dosadíme do potřebných integrálů:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{8}\int e^x(2-4\cos(2x)+1+\cos(4x))\,dx \\
&= \frac{3}{8}\int e^x\,dx - \frac{1}{2}\int e^x\cos(2x) + \frac{1}{8}\int e^x\cos(4x)\,dx \\
&= \frac{3}{8}e^x - \frac{1}{10}e^x\cos(2x) - \frac{1}{5}e^x\sin(2x) + \frac{1}{136}e^x\cos(4x) + \frac{1}{34}e^x\sin(4x)
\end{aligned}$$

Nakonec, opět s použitím výše spočteného, získáme

$$\begin{aligned}
\int F(x)\,dx &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{3}{4}e^x - \frac{1}{5}e^x\cos(2x) - \frac{2}{5}e^x\sin(2x) + \frac{1}{68}e^x\cos(4x) + \frac{1}{17}e^x\sin(4x)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}e^x - \frac{1}{25}(e^x\cos(2x)+2e^x\sin(2x)) - \frac{2}{25}(e^x\sin(2x)-2e^x\cos(2x))\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{68\cdot 17}(e^x\cos(4x)+4e^x\sin(4x)) + \frac{1}{17^2}(e^x\sin(4x)-4e^x\cos(4x))\right) \\
&= \frac{3}{8}e^x - \frac{2}{25}e^x\sin(2x) + \frac{3}{50}e^x\cos(2x)) - \frac{15}{8\cdot 17^2}e^x\cos(4x) + \frac{1}{17^2}e^x\sin(4x).
\end{aligned}$$

Nakonec tedy máme

$$\begin{aligned}
\int xe^x\sin^4 x\,dx &= xe^x\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{10}\cos(2x) - \frac{1}{5}\sin(2x) + \frac{1}{136}\cos(4x) + \frac{1}{34}\sin(4x)\right) \\
&\quad - e^x\left(\frac{3}{8} - \frac{2}{25}\sin(2x) + \frac{3}{50}\cos(2x)) - \frac{15}{8\cdot 17^2}\cos(4x) + \frac{1}{17^2}\sin(4x)\right) + C
\end{aligned}$$

[9] 4. Vyšetřete průběh funkce (definiční obor D_f, intervaly spojitosti, limity v krajních bodech D_f, průsečíky s osami, intervaly monotónie, lokální a globální extrémy, obor hodnot f, limity derivací v krajních bodech $D_{f'}$, intervaly konvexity/konkávity funkce f, inflexní body, asymptoty, detailní graf)

$$f(x) := \arccos\left(\frac{6x}{x^2+9}\right).$$

Řešení:

Definiční obor funkce arccos je $[-1,1]$. K určení definičního oboru funkce f potřebujeme vyřešit

$$-1 \leq \frac{6x}{x^2+9} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2-9 \leq 6x \leq x^2+9 \quad \Leftrightarrow \quad (x \pm 3)^2 \geq 0.$$

Vidíme tedy, že $D_f = \mathbb{R}$. Funkce není ani sudá ani lichá ani periodická. Funkce je spojitá.

Spočteme nejdříve první dvě derivace.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\arccos\left(\frac{6x}{x^2+9}\right)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{6x}{x^2+9}\right)^2}}\frac{6(x^2+9)-12x^2}{(x^2+9)^2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{(x^2-9)^2}}\frac{6(9-x^2)}{x^2+9} = -\frac{6\operatorname{sign}(9-x^2)}{x^2+9}, \\ f''(x) &= \left(-\frac{6\operatorname{sign}(9-x^2)}{x^2+9}\right)' = \frac{12x\operatorname{sign}(9-x^2)}{(x^2+9)^2.} \end{aligned}$$

Definiční obor první a druhé derivace je tedy $D_{f'} = D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$.

Spočteme limity v krajních bodech definičních oborů:

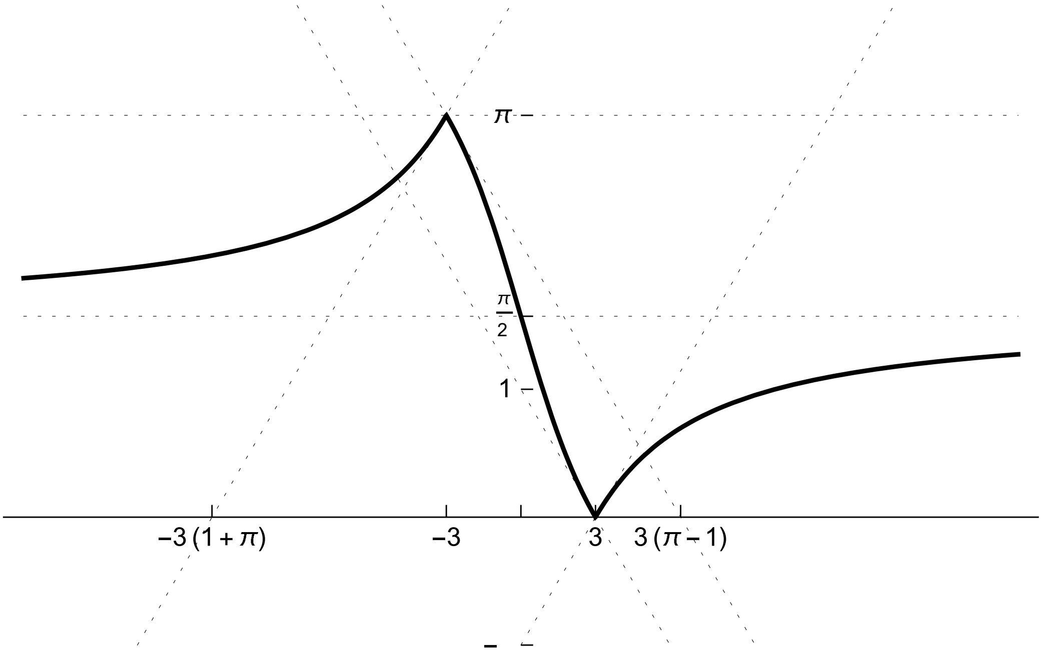
$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \arccos(0) = \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{x\to\pm\infty} f'(x) &= 0, \\ \lim_{x\to-3_-} f'(x) &= \frac{1}{3}, \\ \lim_{x\to 3_+} f(x) &= \frac{1}{3}, \\ \lim_{x\to-3_+} f(x) &= -\frac{1}{3}, \\ \lim_{x\to 3_-} f(x) &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ihned tak také dostáváme (díky spojitosti funkce f, že $f'(-3_-) = f'(3_+) = \frac{1}{3}$ a $f'(-3_+) = f'(3_-) = -\frac{1}{3}$.

Určíme znaménka prvních a druhých derivací:

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \quad \text{pro } x \in (-\infty,-3) \cup (3,\infty), \\ f'(x) &< 0 \quad \text{pro } x \in (-3,3), \\ f''(x) &> 0 \quad \text{pro } x \in (-\infty,-3) \cup (0,3), \\ f''(x) &< 0 \quad \text{pro } x \in (-3,0) \cup (3,\infty). \end{aligned}$$

Funkce je tedy rostoucí na intrvalu $(-\infty, 3)$ a na intervalu $(3, \infty)$. Funkce je klesajcí na intervalu $(-3, 3)$. Funkce nabývá v bodě $x = -3$ globálního maxima a to $f(-3) = \arccos(-1) = \pi$. Funkce nabývá v bodě $x = 3$ globálního minima a to $f(3) = \arccos(1) = 0$. Funkce je konvexní na intervalu $(-\infty, -3)$ a na intervalu $(0, 3)$, funkce je konkávní na intervalu $(-3, 0)$ a na intervalu $(3, \infty)$. Inflexními body jsou body $x = \pm 3, 0$. Asymptota v nekonečnu je přímka $y = \pi/2$.



Obrázek 1: Graf funkce f