Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

Jméno a příjmení: ______________________ Cvičící: ______________________

Příklad	1	2	3	4	**Body**
Maximum bodů	7	5	10	8	30
Získané body					

[7] 1. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\arccos(e^{\sin x} - x - 1) - \arctan \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \arcsin(1-x^4)}}{x^2}.$$

Řešení:

Označme

$$f(x) := \arccos(e^{\sin x} - x - 1) - \arctan \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \arcsin(1-x^4)}$$

Potom máme

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \arccos(0) - \lim_{y\to\infty} \arctan y = 0$$

Spočtěme jesště

$$f'(x) = \left(\arccos(e^{\sin x} - x - 1) - \arctan \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \arcsin(1-x^4)}\right)'$$

$$= -\frac{e^{\sin x}\cos x - 1}{\sqrt{1-(e^{\sin x} - x - 1)^2}} + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} - \arcsin(1-x^4)}\right)^2} \frac{\frac{4x^3}{\sqrt{1-(1-x^4)^2}}}{\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(1-x^4)\right)^2}$$

$$= -\frac{e^{\sin x}\cos x - 1}{\sqrt{1-(e^{\sin x} - x - 1)^2}} + \frac{4}{\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(1-x^4)\right)^2 + 1} \frac{x}{\sqrt{2-x^4}}$$

Nyní jsem již připraveni spočítat limitu pomocí l'Hospitalova pravidla za předpokladu, že limita vpravo bude existovat.

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0_+} \frac{f'(x)}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0_+} -\frac{e^{\sin x}\cos x - 1}{2x\sqrt{1-(e^{\sin x} - x - 1)^2}} + \frac{2}{\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(1-x^4)\right)^2 + 1} \frac{1}{\sqrt{2-x^4}}$$

$$= -\lim_{x\to 0_+} \frac{1}{2\sqrt{1-(e^{\sin x} - x - 1)^2}} \left(\frac{\cos x(e^{\sin x} - 1)}{x} + \frac{\cos x - 1}{x}\right) + \frac{2}{\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(1)\right)^2 + 1} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0_+} \left(\cos x \frac{(e^{\sin x} - 1)}{\sin x} \frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x - 1}{x}\right) + \sqrt{2} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}.$$

Použili jsem větu o aritmetice limit a znalost dvou základních limit:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

[5] 2. Uvažujte funkci f definovanou na $\mathbb{R}$ následovně:

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\cosh x}{\cosh 1} & \text{pro } |x| > 1, \\ A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 & \text{pro } x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Uvažujte následující na sobě nezávislé čtyři úlohy: Jaké jsou podmínky na A, B, C, D, E tak, aby

(i) $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$,

(ii) $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$,

(iii) $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ a f má tři lokální extrémy

(iv) $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

Řešení:

Protože to bude potřeba, spočítáme si první a druhé derivace f pro $|x| \neq 1$.

$$f'(x) := \begin{cases} \dfrac{\sinh x}{\cosh 1} & \text{pro } |x| > 1, \\ B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 & \text{pro } x \in (-1, 1). \end{cases}$$

a

$$f''(x) := \begin{cases} \dfrac{\cosh x}{\cosh 1} & \text{pro } |x| > 1, \\ 2C + 6Dx + 12Ex^2 & \text{pro } x \in (-1, 1). \end{cases}$$

Dále se budeme věnovat jedntlivým úlohám.

(i) Spojitost. Protože $\lim_{x\to -1_-} f(x) = \lim_{x\to 1_+} f(x) = 1$, potřebujeme pro spojitost funkce f volit parametry tak, aby $f(\pm 1) = 1$. To je ekvivalentí

$$\begin{aligned} A + B + C + D + E &= 1, \\ A - B + C - D + E &= 1. \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} A + C + E &= 1, \\ B + D &= 0. \end{aligned}}$$

(ii) Funkce musí být spojitá a splňovat tedy podmínky bodu (i). Pro spojitost derivace postupujeme takto: Na intervalech neobsahujících ± 1 jsou derivace spojité. Potřebujeme tedy ověřit rovnost limit zleva a zprava v bodech ± 1 pro první derivaci. Protože $\lim_{x\to -1_-} f'(x) = -\lim_{x\to 1_+} f'(x) = \frac{\sinh 1}{\cosh 1}$, potřebujeme pro spojitost funkce f' volit parametry tak, aby $f'(\pm 1) = \pm\frac{\sinh 1}{\cosh 1}$. To je ekvivalentí

$$\begin{aligned} B + 2C + 3D + 4E &= \frac{\sinh 1}{\cosh 1}, \\ B - 2C + 3D - 4E &= -\frac{\sinh 1}{\cosh 1}. \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} B + 3D &= 0, \\ 2C + 4E &= \frac{\sinh 1}{\cosh 1}. \end{aligned}}$$

(iii) Protože spojitost funkce a spojitost derivací je řešena výše, soustředíme se na problém lokálních extrémů. Nejdříve si můžeme možný tvar funkce f zjednodušit. Použitím podmínek z prvních dvou kroků zjistíme

$$\boxed{B = D = 0} \qquad \boxed{2C = \frac{\sinh 1}{\cosh 1} - 4E}$$

Vzorec pro derivaci f na $(-1, 1)$ se tedy zjednoduší

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2Cx + 4Ex^3 = x(2C + 4Ex^2) = x\left(\frac{\sinh 1}{\cosh 1} - 4E + 4Ex^2\right) \\ &= 4Ex\left(x^2 - \left(1 - \frac{\sinh 1}{4E\cosh 1}\right)\right). \end{aligned}$$

Vně intervalu $(-1, 1)$ je $f' \neq 0$. Extrémy (lokální) může tedy nabývat pouze v $(-1, 1)$. Pokud mají být extrémy tři, musí mít polynom výše tři kořeny v intervalu $(-1, 1)$. To je možné jedině, pokud

$$E > 0 \qquad \text{a} \qquad \left(1 - \frac{\sinh 1}{4E\cosh 1}\right) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{E > \frac{\sinh 1}{4\cosh 1}}$$

Pokud E splňuje tuto podmínku a konstanty A, B, C, D splňují výše uvedené podmínky, potom má funce v bodech $x = \pm\sqrt{1 - \frac{\sinh 1}{4E\cosh 1}}$ ostrá lokální i globální minima a v bodě $x = 0$ ostré lokální maximum.

(iv) Spojitost druhých derivací. Už víme, že

$$f''(x) := \begin{cases} \dfrac{\cosh x}{\cosh 1} & \text{pro } |x| > 1, \\ \dfrac{\sinh 1}{\cosh 1} - 4E + 12Ex^2 & \text{pro } x \in (-1, 1). \end{cases}$$

Pokud mají být spojité i druhé derivace, musí platit:

$$\boxed{E = \frac{1}{8} - \frac{\sinh 1}{8\cosh 1}}$$

[10] 3. Nalezněte primitivní funkci na $\mathbb{R}$

$$\int \frac{2x^2+x+1}{(x^2-2x+5)^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

Nápověda: Namísto Eulerových substitucí je možné použít např. $x = 1 + 2\sinh y$.

Řešení:

Funkce je na $\mathbb{R}$ spojitá, proto musí mít primitivní funkci. Integrál nejdříve upravíme

$$F := \int \frac{2x^2+x+1}{(x^2-2x+5)^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int \frac{2(x-1)^2+5(x-1)+4}{((x-1)^2+4)^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int \frac{4\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+5\frac{x-1}{2}+2}{\left(\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

Pro výpočet integrálu zvolíme substituci $\frac{x-1}{2} = \sinh y$, nebo-li $x = 1 + 2\sinh y$. Funkce sinh zobrazuje prostě $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Navíc máme $dx = 2\cosh y\,dy$. Celkem tedy (použijeme i vzorec $\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$)

$$\begin{aligned} F &= \int \frac{4\sinh^2 y+5\sinh y+2}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} 2\cosh y\,dy = \int 8\sinh^2 y + 10\sinh y + 4\,dy \\ &= 8\int \sinh^2 y\,dy + 10\cosh y + 4y \end{aligned}$$

Zbývající integrál spočítáme pomocí integrace per partes (použijeme $(\sinh y)' = \cosh y$ a $(\cosh y)' = \sinh y$)

$$\begin{aligned} \int \sinh^2 y\,dy &= \int \sinh y(\cosh y)'\,dy = \sinh y\cosh y - \int \cosh^2 y\,dy \\ &= \sinh y\cosh y - \int 1+\sinh^2 y\,dy = \sinh y\cosh y - y - \int \sinh^2 y\,dy, \end{aligned}$$

což po převedení na jednu stranu dává

$$\int \sinh^2 y\,dy = \frac{1}{2}\left(\sinh y\cosh y - y\right).$$

Nyní vše dosadíme zpět a získáme

$$\begin{aligned} F &= 8\int \sinh^2 y\,dy + 10\cosh y + 4y = 4\left(\sinh y\cosh y - y\right) + 10\cosh y + 4y \\ &= 2\cosh y(2\sinh y+5) = 2(2\sinh y+5)\sqrt{1+\sinh^2 y} \\ &= 2\left((2\left(\frac{x-1}{2}\right)+5\right))\sqrt{1+\left(\frac{x-1}{2}\right)^2} + C = (x+4)\sqrt{x^2-2x+5} + C \end{aligned}$$

Pro úplnost ještě uvedeme výpočet za pomoci Eulerovy substituce, který je však velice náročný. Uvedeme pouze jednu cestu. Využijeme úpravu

$$F = \int \frac{4\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+5\frac{x-1}{2}+2}{\left(\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}\,dx,$$

která "vybízí"k substituci $u = \frac{x-1}{2}$, což vede k $x = 1 + 2u$ a $dx = 2du$ a

$$F = \int \frac{4u^2 + 5u + 2}{(u^2+1)^{\frac{1}{2}}} 2\, du.$$

Nyní použijeme substituci $\sqrt{u^2+1} = -u + t$. Potom $u = \frac{t^2-1}{2t}$ a $du = \frac{t^2+1}{2t^2}\, dt$ a $\sqrt{u^2+1} = \frac{t^2+1}{2t}$

$$\begin{aligned}
F &= \int \frac{4\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2 + 5\frac{t^2-1}{2t} + 2}{\frac{t^2+1}{2t}} 2\frac{t^2+1}{2t^2}\, dt \\
&= 2\int \frac{4\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2 + 5\frac{t^2-1}{2t} + 2}{t}\, dt \\
&= \int \frac{2(t^2-1)^2}{t^3} + \frac{5(t^2-1)}{t^2} + \frac{4}{t}\, dt \\
&= \int 5 + \frac{2}{t^3} - \frac{5}{t^2} + 2t\, dt \\
&= t^2 + 5t - \frac{1}{t^2} + \frac{5}{t} = \frac{4(t^2-1)}{2t}\frac{t^2+1}{2t} + 10\frac{t^2+1}{2t} \\
&= 4u\sqrt{u^2+1} + 10\sqrt{u^2+1} = 2(2u+5)\sqrt{u^2+1} \\
&= (x+4)\sqrt{x^2-2x+5} + C
\end{aligned}$$

Varování: Zde Eulerova substituce nakonec vedla k "rozumnému"rozkladu na parciální zlomky. Je to však způsobeno velmi vhodnou volbou substituce. Při jiné (a principelně možné) Eulerově substituci by se mohl výpočet podstatně zkomplikovat.

[8] 4. Vyšetřete průběh funkce (definiční obor D_f, intervaly spojitosti, limity v krajních bodech D_f, průsečíky s osami, intervaly monotónie, lokální a globální extrémy, obor hodnot f, limity derivací v krajních bodech $D_{f'}$, intervaly konvexity/konkávity funkce f, inflexní body, asymptoty, detailní graf)

$$f(x) := \arctan\left(\frac{2x}{x^2+1}\right).$$

Řešení:

Definiční obor funkce f je $\mathbb{R}$, funkce je **lichá**, spojitá a omezená. Spočteme limity v $\pm\infty$

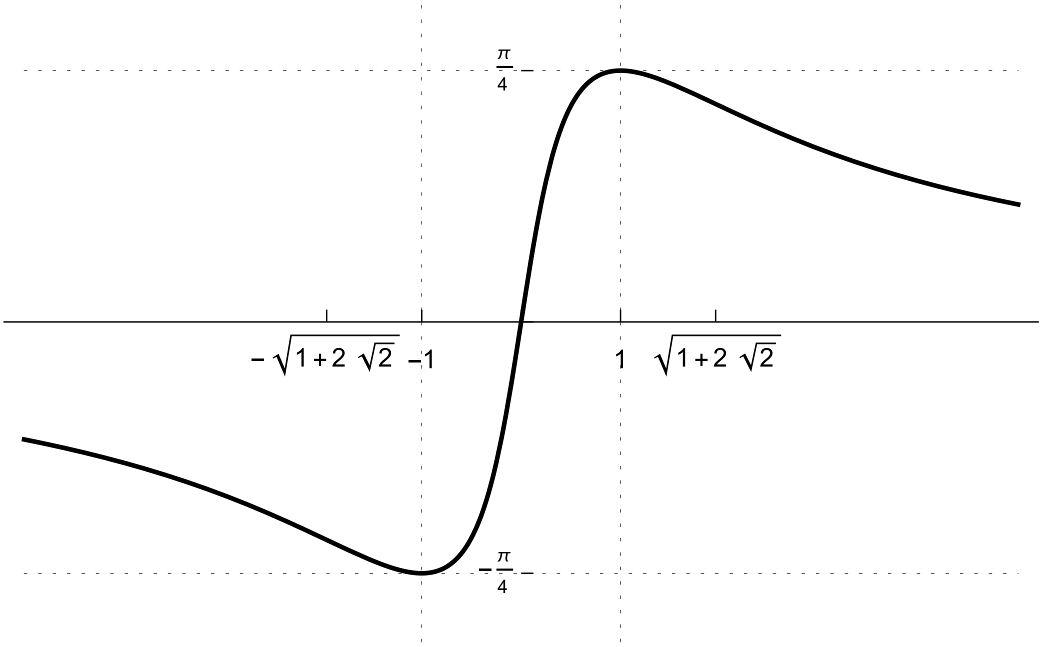
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \arctan(0) = 0.$$

Dále spočteme nejdříve první dvě derivace

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' = \frac{1}{1+\frac{4x^2}{(x^2+1)^2}}\frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2+4x^2} = \frac{2(1-x^2)}{x^4+6x^2+1} \\
f''(x) &= \frac{-4x(x^4+6x^2+1)-2(1-x^2)(4x^3+12x)}{(x^4+6x^2+1)^2} = 4x\frac{x^4-2x^2-7}{(x^4+6x^2+1)^2} \\
&= 4x\frac{(x^2-1-\sqrt{8})(x^2-1+\sqrt{8})}{(x^4+6x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

Vidíme, že na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$ je derivace záporná a že na intervalu $(-1,1)$ je kladná. Proto je funkce klesající na intervalu $(-\infty,-1)$, rostoucí na intervalu $(-1,1)$ a klesající na intervalu $(1,\infty)$. Vzhledem ke spočteným limitám v $\pm\infty$, tedy vidíme, že v bodě $x=-1$ má fukce globální minimum a to $f(-1)=-\frac{\pi}{4}$, v bodě $x=1$ má funkce globální maximum a to $f(1)=\frac{\pi}{4}$.

Obdobně pro druhou derivaci vidíme, že je kladná na intervalech $(-\sqrt{1+\sqrt{8}},0)$ a $(\sqrt{1+\sqrt{8}},\infty)$ a záporná na intervalech $(-\infty,-\sqrt{1+\sqrt{8}})$ a $(0,\sqrt{1+\sqrt{8}})$. Funkce je tedy konvexní na intrvalech $(-\sqrt{1+\sqrt{8}},0)$ a $(\sqrt{1+\sqrt{8}},\infty)$ a konkávní na intervalech $(-\infty,-\sqrt{1+\sqrt{8}})$ a $(0,\sqrt{1+\sqrt{8}})$. Body $x=0$ a $x=\pm\sqrt{1+\sqrt{8}}$ jsou inflexní.



Obrázek 1: Graf funkce f