Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

Jméno a příjmení: ______________________ Cvičící: ______________________

Příklad	1	2	3	4	**Body**
Maximum bodů	5	6	9	10	30
Získané body					

[5] 1. Pro která $a, b \in \mathbb{R}$ existuje **vlastní nenulová** limita pro

$$L := \lim_{x\to\infty} x^a \left(\sqrt[3]{x^3+3x-1} - \sqrt{x^2+b}\right).$$

Pokud existuje, limitu L určete.

Řešení:

Nejdříve limitu upravíme

$$\lim_{x\to\infty} x^a \left(\sqrt[3]{x^3+3x-1} - \sqrt{x^2+b}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}} - \sqrt{1+\frac{b}{x^2}}}{x^{-a-1}}$$
$$= \lim_{y\to 0_+} \frac{\sqrt[3]{1+3y^2-y^3} - \sqrt{1+by^2}}{y^{a+1}}.$$

1) Pomocí l'Hospitalova pravidla: Limita čitatele je nula. Proto, aby celková limita byla konečná a nenulová, musí platit minimálně $a > -1$. Potom půjde použít l'Hospitalovo pravidlo a pokračujeme, za předpokladu, že limita v pravo existuje (i nevlastní)

$$= \lim_{y\to 0_+} \frac{\left(\sqrt[3]{1+3y^2-y^3}\right)' - \left(\sqrt{1+by^2}\right)'}{(y^{a+1})'}$$
$$= \lim_{y\to 0_+} \frac{(1+3y^2-y^3)^{-\frac{2}{3}}(2y-y^2) - by(1+by^2)^{-\frac{1}{2}}}{(a+1)y^a}$$
$$= \lim_{y\to 0_+} \frac{(1+3y^2-y^3)^{-\frac{2}{3}}(2-y) - b(1+by^2)^{-\frac{1}{2}}}{(a+1)y^{a-1}}$$

V případě, že $b \neq 2$, je limita čitatele konečná a nenulová a použitím věty o aritmetice limit dostaneme

$$= \frac{2-b}{a+1} \lim_{y\to 0_+} y^{1-a}$$

Pokud má být limita nenulová a konečná, musí platit $a = 1$ a celková limita je rovna

$$L = \frac{2-b}{2}.$$

Pokud $b = 2$, je limita čitatele rovna nule, proto i limita jmenovatele musí být nula a tedy minimálně musí platit $a > 1$. V tom případě aplikujeme ještě jednou l'Hospitalovo pravidlo a máme

$$\begin{aligned}
&= \lim_{y\to 0_+} \frac{\left((1+3y^2-y^3)^{-\frac{2}{3}}(2-y) - 2(1+2y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)'}{(a+1)(y^{a-1})'} \\
&= \lim_{y\to 0_+} \frac{-(1+3y^2-y^3)^{-\frac{2}{3}} - (1+3y^2-y^3)^{-\frac{5}{3}}(2-y)(4y-2y^2) + 4y(1+2y^2)^{-\frac{3}{2}}}{(a+1)(a-1)y^{a-2}} \\
&= \lim_{y\to 0_+} \frac{-(1+3y^2-y^3)^{-\frac{2}{3}}}{(a+1)(a-1)y^{a-2}} - \frac{(1+3y^2-y^3)^{-\frac{5}{3}}(2-y)(4-2y) - 4(1+2y^2)^{-\frac{3}{2}}}{(a+1)(a-1)y^{a-3}}.
\end{aligned}$$

První limita je konečná a nenulová pouze pokud $a = 2$. Vtom případě pak pro celkovou limitu platí

$$\begin{aligned}
&= \lim_{y\to 0_+} \frac{-(1+3y^2-y^3)^{-\frac{2}{3}}}{3} - \frac{(1+3y^2-y^3)^{-\frac{5}{3}}(2-y)(4-2y) - 4(1+2y^2)^{-\frac{3}{2}}}{3y^{-1}} \\
&= -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Celkem tedy máme dvě volby

$$\boxed{b \neq 2,\, a = 1 \implies L = \frac{2-b}{2}} \qquad \boxed{b = 2,\, a = 2 \implies L = -\frac{1}{3}}.$$

V jiných případech je buď limita nulová nebo nevlastní.

Pomocí vzorečku pro $A^6 - B^6$: Připomene si, že

$$A^6 - B^6 = (A-B)(A^5 + A^4B + A^3B^2 + A^2B^3 + AB^4 + B^5).$$

Zadefinujeme

$$\begin{aligned}
A &:= \sqrt[6]{(1+3y^2-y^3)^2}, \\
B &:= \sqrt[6]{(1+by^2)^3}.
\end{aligned}$$

a upravujeme

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to 0_+} \frac{\sqrt[3]{1+3y^2-y^3} - \sqrt{1+by^2}}{y^{a+1}} = \lim_{y\to 0_+} \frac{\sqrt[6]{(1+3y^2-y^3)^2} - \sqrt[6]{(1+by^2)^3}}{y^{a+1}} \\
&= \lim_{y\to 0_+} \frac{(A-B)(A^5 + A^4B + A^3B^2 + A^2B^3 + AB^4 + B^5)}{y^{a+1}(A^5 + A^4B + A^3B^2 + A^2B^3 + AB^4 + B^5)} \\
&= \lim_{y\to 0_+} \frac{A^6 - B^6}{y^{a+1}} \lim_{y\to 0_+} \frac{1}{(A^5 + A^4B + A^3B^2 + A^2B^3 + AB^4 + B^5)} \\
&= \frac{1}{6} \lim_{y\to 0_+} \frac{(1+3y^2-y^3)^2 - (1+by^2)^3}{y^{a+1}} = \frac{1}{6} \lim_{y\to 0_+} \frac{(6-3b) - 2y + y^2(9-3b^2) - 6y^3 + b^3y^4 + y^6}{y^{a-1}}
\end{aligned}$$

a zbytek plyne z diskuze výše.

Pomocí Taylorova rozvoje: Připomene si, že

$$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z}{8} + o(z^2),$$
$$\sqrt[3]{1+z} = 1 + \frac{z}{3} - \frac{z^2}{9} + o(z^2).$$

Dosadíme a počítáme

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{y\to 0_+} \frac{\sqrt[3]{1+3y^2-y^3} - \sqrt{1+by^2}}{y^{a+1}} \\
&= \lim_{y\to 0_+} \frac{1 + \frac{3y^2-y^3}{3} - \frac{(3y^2-y^3)^2}{9} + o((3y^2-y^3)^2) - (1 + \frac{by^2}{2} - \frac{(by^2)^2}{8} + o((by^2)^2))}{y^{a+1}} \\
&= \lim_{y\to 0_+} \frac{\frac{3-y}{3} - \frac{(3y-y^2)^2}{9} - (\frac{b}{2} - \frac{b^2y^2}{8} + o(y^2)}{y^{a-1}} \\
&= \lim_{y\to 0_+} \frac{-\frac{y}{3} - \frac{2-b}{2} + o(y)}{y^{a-1}}
\end{aligned}
$$

a zbytek už je opět stejný.

[6] 2. Buď $A \in \mathbb{R}$ libovolné. Pro jaká $b \in \mathbb{R}$ platí (v závislosti na A)

$$e^{-x\sin(2x-x^2)} - \cos(2x+x^2) + A\sinh(x^3-x^4) - \frac{37x^4}{6} = o(|x|^b) \text{ pro } x \to 0?$$

Řešení:

Označme

$$f(x) := e^{-x\sin(2x-x^2)} - \cos(2x+x^2) + A\sinh(x^3-x^4) - \frac{37x^4}{6}$$

Nejdříve připomeneme Taylorovy rozvoje dotyčných funkcí v okolí nuly:

$$\begin{aligned}
e^y &= 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + o(y^4),\\
\sin y &= y - \frac{y^3}{3!} + o(y^4),\\
\cos y &= 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + o(y^4),\\
\sinh y &= y + \frac{y^3}{3!} + o(y^4).
\end{aligned}$$

Postupným dosazením tedy získáme

$$\begin{aligned}
e^{-x\sin(2x-x^2)} &= 1 - x\sin(2x-x^2) + \frac{x^2\sin^2(2x-x^2)}{2} - \frac{x^3\sin^3(2x-x^2)}{3!} + o(x^4\sin^4(2x-x^2))\\
&= 1 - x\left((2x-x^2) - \frac{(2x-x^2)^3}{3!} + o(x^4)\right)\\
&\quad + \frac{x^2}{2}\left((2x-x^2) - \frac{(2x-x^2)^3}{3!}\right)^2 + o(x^5)\\
&= 1 - 2x^2 + x^3 + \frac{4x^4}{3} - 2x^5 + o(x^5)\\
&\quad + 2x^4 - 2x^5 + o(x^5)\\
&= 1 - 2x^2 + x^3 + \frac{10x^4}{3} - 4x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

Podobně

$$\begin{aligned}
\cos(2x+x^2) &= 1 - \frac{(2x+x^2)^2}{2!} + \frac{(2x+x^2)^4}{4!} + o(x^5)\\
&= 1 - \frac{4x^2+x^4+4x^3}{2} + \frac{16x^4+32x^5}{4!} + o(x^5)\\
&= 1 - 2x^2 - 2x^3 + \frac{x^4}{6} + \frac{4x^5}{3} + o(x^5)
\end{aligned}$$

a

$$\sinh(x^3-x^4) = x^3 - x^4 + o(x^5)$$

Dohromady tedy dostáváme

$$\begin{aligned}f(x) = 1 - 2x^2 + x^3 + \frac{10x^4}{3} - 4x^5 - \left(1 - 2x^2 - 2x^3 + \frac{x^4}{6} + \frac{4x^5}{3}\right) \\ + A(x^3 - x^4) - \frac{37x^4}{6} + o(x^5) \\ = (3 + A)x^3 - 3x^4 - \frac{16}{3}x^5 - Ax^4 + o(x^5)\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že $f(x) = o(|x|^b)$ pro $x \to 0$ pro všechna

$$b < \begin{cases} 3 & \text{pokud } A \neq -3, \\ 5 & \text{pokud } A = -3. \end{cases}$$

[9] 3. Nalezněte primitivní funkci na $\mathbb{R}$

$$\int \frac{4\sin x + 3\cos x + 3}{3\cos x + 4\sin x + 7}\, dx$$

Řešení:

Integrand je spojitá 2π-periodická funcke. Primitivní funkce bude tedy existovat na celém $\mathbb{R}$. Najdeme nejříve primitivní funkci na intervalu $(-\pi, \pi)$ a poté ji rozšíříme na celé $\mathbb{R}$ pomocí nalepování. Zvolíme substituci

$$t = \tan\frac{x}{2}, \quad x = 2\arctan t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Pokud F označíme primitivní funkci, potom máme

$$\begin{aligned}
F &= \int \frac{4\sin x + 3\cos x + 3}{3\cos x + 4\sin x + 7}\, dx = \int \frac{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3}{3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 4\frac{2t}{1+t^2} + 7} \frac{2dt}{1+t^2} \\
&= \int \frac{16t + 12}{(1+t^2)(3 - 3t^2 + 8t + 7 + 7t^2)}\, dt = \int \frac{16t+12}{(1+t^2)(4t^2 + 8t + 10)}\, dt \\
&= \int \frac{2}{1+t^2} - \frac{4}{2t^2 + 4t + 5}\, dt = \int \frac{2}{1+t^2} - \frac{1}{3} \frac{4}{\left(\frac{\sqrt{2}(t+1)}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\, dt \\
&= 2\arctan t - \frac{2\sqrt{6}}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}(t+1)}{\sqrt{3}}\right) \\
&= x - \frac{2\sqrt{6}}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}\left(\tan\frac{x}{2} + 1\right)}{\sqrt{3}}\right) + C.
\end{aligned}$$

Totot je primitivní funkce na jakémkoliv intervalu $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$. Abychom získali primitivní funkci na $\mathbb{R}$, provedeme nalepování. Naše primitivní funkce bude tvaru

$$F(x) = x - \frac{2\sqrt{6}}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}\left(\tan\frac{x}{2} + 1\right)}{\sqrt{3}}\right) + C_k \text{ na } (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

Zafixujeme C_0 a určíme rekurentní vztah pro C_k z podmínky na spojitost F, tedy

$$\lim_{x \to (\pi + 2k\pi)_-} F(x) = \lim_{x \to (\pi + 2(k+1)\pi)_+} F(x),$$

což je

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to (\pi + 2k\pi)_-} x - \frac{2\sqrt{6}}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}\left(\tan\frac{x}{2} + 1\right)}{\sqrt{3}}\right) + C_k \\
&= \lim_{x \to (\pi + 2(k+1)\pi)_+} x - \frac{2\sqrt{6}}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}\left(\tan\frac{x}{2} + 1\right)}{\sqrt{3}}\right) + C_{k+1},
\end{aligned}$$

což vede k podmínce

$$C_{k+1} = C_k - \frac{2\sqrt{6}\pi}{3} - 2\pi \implies C_k = C_0 - 2k\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{3} - 1\right).$$

[10] 4. Vyšetřete průběh funkce (definiční obor D_f, intervaly spojitosti, limity v krajních bodech D_f, průsečíky s osami, intervaly monotónie, lokální a globální extrémy, obor hodnot f, limity derivací v krajních bodech $D_{f'}$, intervaly konvexity/konkávity funkce f, inflexní body, asymptoty, detailní graf)

$$f(x) := \ln|e^{2x} - e^x - e^{x+1} + e|.$$

Řešení:

Nejdříve upravíme

$$e^{2x} - e^x - e^{x+1} - e = (e^x)^2 - (e+1)e^x + e = (e^x - 1)(e^x - e).$$

Vidíme, že kořeny jsou $x = 0$ a $x = 1$ a tedy vidíme, že

$$f(x) = \begin{cases} \ln(e^{2x} - e^x - e^{x+1} + e) & \text{pro } x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty), \\ \ln(-e^{2x} + e^x + e^{x+1} - e) & \text{pro } x \in (0, 1). \end{cases}$$

Definiční obor funkce f je $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, funkce není lichá, sudá ani periodická. Je spojitá na definičním oboru. Spočteme limity v $\pm\infty$, v 0 a v 1.

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \\ &\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1, \\ &\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = -\infty. \end{aligned}$$

Dále spočteme první dvě derivace

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{sign}(e^{2x} - e^x - e^{x+1} + e)\frac{2e^{2x} - e^x - e^{x+1}}{|e^{2x} - e^x - e^{x+1} + e|} = \frac{e^x(2e^x - 1 - e)}{e^{2x} - e^x - e^{x+1} + e}, \\ f''(x) &= \frac{(4e^{2x} - e^x - e^{x+1})(e^{2x} - e^x - e^{x+1} + e) - (2e^{2x} - e^x - e^{x+1})(2e^{2x} - e^x - e^{x+1})}{(e^{2x} - e^x - e^{x+1} + e)^2} \\ &= \frac{-e^{3x} - e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - e^{x+1} - e^{x+2}}{(e^{2x} - e^x - e^{x+1} + e)^2} \\ &= -e^x \frac{(e+1)\left(e^x - \frac{2e}{e+1}\right)^2 + e\frac{(e-1)^2}{e+1}}{(e^{2x} - e^x - e^{x+1} + e)^2} \end{aligned}$$

Spočteme limity první derivace v krajních bodech definičního oboru.

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} f'(x) = 2, \\ &\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \\ &\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 1_-} f(x) = -\infty, \\ &\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 1_+} f(x) = -\infty. \end{aligned}$$

Jediný nulový bod derivace je

$$x = \ln\frac{e+1}{2}.$$

Určíme ještě znaménko derivace:

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \quad \text{na } (-\infty, 0) \cup (\ln((e+1)/2), 1), \\ f'(x) &> 0 \quad \text{na } (0, \ln((e+1)/2)) \cup (1, \infty). \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že na intevalech $(-\infty, 0)$ a $\ln((e+1)/2)$ je funkce klesající a na intervalech $(0, \ln((e+1)/2))$ a $1, \infty)$ rostoucí. Vzhledem ke spočítaným limitám v krajních bodech vidíme, že obor hodnot je $\mathbb{R}$ a že v bodě $\ln(e+1)/2$ nabývá funkce lokální maximum a to

$$f(\ln((e+1)/2)) = 2\ln(e-1)/2 < 0.$$

Globální extrémy funkce nemá. Druhá derivace je vždy záporná, proto je funkce konkávní na intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ a $(1, \infty)$. Určíme ještě asymptotu v $\pm\infty$. V $-\infty$ je to zejmě

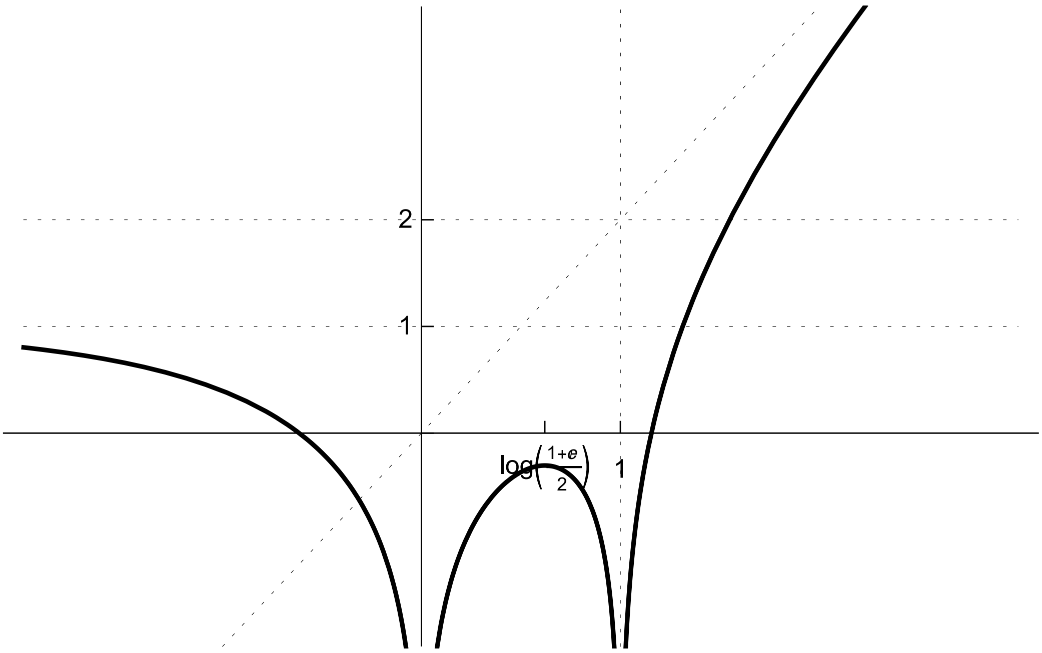
$$y = 1.$$

Pro $+\infty$ počítáme (připomeňme, že asymptota jeve tvaru $y = 2x + c$, kde

$$\begin{aligned} c = \lim_{x\to\infty} f(x) - 2x &= \lim_{x\to\infty} \ln e^{2x} - e^{x} - e^{x+1} + e - \ln e^{2x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \ln\left(1 - e^{-x} - e^{-x+1} + e^{1-2x}\right) = \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

Asymptota je tedy

$$y = 2x.$$



Obrázek 1: Graf funkce f