Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

Jméno a příjmení: ______________________ Cvičící: ______________________

Otázka	1	2	3	**Body**
Maximum bodů	6	6	8	20
Získané body				

[6] 1. Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost.

a) Zadefinujte pojem **podposloupnosti vybrané z posloupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a pojem **omezené posloupnosti**.

b) Zformulujte **Weierstrassovu větu** pro omezenou posloupnost.

c) Zformulujte větu o nabývání globálních extrémů pro spojité funkce.

d) Větu o nabývání globálních extrémů dokažte.

Řešení:

a) Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost. Nechť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nazveme posloupností vybranou z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená právě tehdy, když existuje konstanta C tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \le C$.

b) Z každé omezené posloupnosti reálných čísel lze vybrat konvergentní podposloupnost.

c) Spojitá fukce na uzavřeném intervalu nabývá globální maximum i minimum.

d) Důkaz pouze pro globální maximum. Uvažujme spojitou funkci f na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Definujme $S := \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Supremum existuje. Pokud $S \in \mathbb{R}$, pak $\forall n\, \exists x_n \in [a, b]$ tak, že $S - \frac{1}{n} < f(x_n) \le S$. Pokud $S = \infty$, pak $\forall n\, \exists x_n \in [a, b]$ tak, že $f(x_n) \ge n$. Tedy máme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující

$$a \le x_n \le b, \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = S.$$

Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená a díky Weierstrassově větě můžeme vybrat konvergentní podposloupnost. Existuje tedy $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ a $x_0 \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0, \qquad \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = S.$$

Z věty o dvou policistech dostaneme $x_0 \in [a, b]$. Konečně, protože funkce f je spojitá na $[a, b]$, můžeme použít Heineho větu a získáme

$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = S.$$

Suprema se tedy nabývá v bodě x_0, což je tedy bodem maxima.

[6] 2. a) Definujte pojmy: **primitivní funkce** a **zobecněná primitivní funkce** na otevřeném intervalu.

b) Zformulujte **věty o substituci** a **větu o integraci per partes**.

c) Větu o integraci per partes dokažte.

Řešení:

a) Buď I otevřený interval a $f : I \to \mathbb{R}$ funkce. Řekneme, že F je primitivní funkcí k f na I právě tehdy, když pro každé $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

Řekneme, že F je zobecněnou primitivní funkcí k f na I, pokud existuje konečná množina K tak, že pro každé $x \in I \setminus K$ platí $F'(x) = f(x)$.

b) **Per partes:** Buď I interval a $f, g : I \to \mathbb{C}$ spojité funkce takové, že pro každé $x \in I$ existují vlastní $f'(x), g'(x)$. Potom platí

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx,$$

existuje-li alespoň jedna z primitivních funkcí výše.

1. věta o substituci: Nechť F je primitivní funkcí k f na intervalu $I = (a, b)$. Nechť φ zobrazuje interval (α, β) do (a, b) a pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ existuje vlastní $\varphi'(t)$. Potom $F \circ \varphi$ je primitivní funkce k $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na intervalu (α, β). Nebo-li

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx\big|_{x:=\varphi(t)}.$$

2. věta o substituci: Nechť φ zobrazuje interval (α, β) do (a, b) **prostě** a pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ existuje vlastní a **nenulová** $\varphi'(t)$. Nechť Φ je primitivní funkce k $(f \circ \varphi)\varphi'$ na (α, β). Potom $\Phi \circ \varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f na intervalu (a, b). Nebo-li

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\big|_{t:=\varphi^{-1}(x)}.$$

c) Důkaz: Předpokládejme nejdříve, že existuje $\int f'(x)g(x)\,dx$. Tuto primitivní funkci označíme H a platí tedy $H' = f'g$ na I. Nyní musíme tedy ukázat, že $fg - H$ je primitivní funkce k fg' na intervalu I. Použijeme věty o derivaci součtu a součinu a dostaneme

$$(fg - H)' = (fg)' - H' = f'g + fg' - f'g = fg',$$

což jsme chteli ukázat.

Druhý prípad, tj. pokud předpokládáme exitenci $\int f(x)g'(x)\,dx$ se udělá obdobně.

[8] 3. Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkce, která je konvexní na intervalu (a, b) a pro každé $x \in (a, b)$ existuje vlastní derivace. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení. Tvrzení dokažte nebo uveďte protipříklad.

(i) f je spojitá a neklesající funkce.
(ii) f nabývá na $[a, b]$ globální extrémy.
(iii) $a < x < y < b \implies f'(x) \leq f'(y)$.
(iv) $x \in (a, b), \quad f'(x) = 0 \implies \forall y \in (a, b)\ f(y) \geq f(x)$.
(v) $2f((a + b)/2) \leq f(a) + f(b)$.
(vi) $2f((a + b)/2) \leq f(a_+) + f(b_-)$. (Zde $f(a_+)$ a $f(b_-)$ značí jednostranné limity.)

Řešení:

(i) NE: např. $f := -x$ je klesající konvexní funkce.

(ii) NE: např $f := x$ na $(0, 1)$ a $f(x) := -10$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus (a, b)$.

(iii) ANO: vezměme libovolné $\tilde{x}, \tilde{y}$ tak, že $x < \tilde{x} < \tilde{y} < y$. Potom jedna z ekvivalentních charakteristik konvexity říká,že

$$\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x} \leq \frac{f(\tilde{y}) - f(\tilde{x})}{\tilde{y} - \tilde{x}} \leq \frac{f(y) - f(\tilde{y})}{y - \tilde{y}}$$

Protože derivace existují, můžeme provést limitní přechod

$$f'(x) = f'(x_+) = \lim_{\tilde{x} \to x_+} \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x} \leq \lim_{\tilde{y} \to y_-} \frac{f(y) - f(\tilde{y})}{y - \tilde{y}} = f'(y_-) = f'(y).$$

(iv) ANO: Použijeme krok (iii). A tedy pro $a < c \leq x \leq d < b$ máme $f'(c) \leq f'(x) = 0 \leq f'(d)$. Funkce f je tedy nerostoucí na intervalu (a, x) a neklesající na intervalu (x, b), což dává kýžený výsledek.

(v) NE: např $f(x) := 1$ pro $x \in (a, b)$ a $f(a) = f(b) = 0$. Pak $2 = 2f((a + b)/2) > f(a) + f(b) = 0$.

(vi) ANO: Funkce je konvexní na intervalu (a, b) a tedy pro $x, y \in (a, b)$ platí

$$2f((x + y)/2) \leq f(x) + f(y).$$

Buď $0 < \varepsilon < (b - a)/2$ libovolné. Volme $x := a + \varepsilon$, $y := b - \varepsilon$, což dává

$$2f((a + b)/2) \leq f(a + \varepsilon) + f(b - \varepsilon).$$

Nyní stačí uvažovat $\varepsilon \to 0_+$. Za předpokladu, že limita zleva v bodě a a limita zprava v bodě b existují, důkaz je hotov. Existence limity bude plynout z monotonie funkce f na pravém okolí bodu a a levém okolí bodu b. Skutečně, pokud $I := \inf_x f'(x) \geq 0$, potom je funkce na celém intervalu neklesající. Pokud je $S := \sup_x f'(x) \leq 0$, pak je funkce na celém intervalu nerostoucí. Konečně, pokud $I < 0 < S$, pak existuje $a < x < y < b$ tak, že $f'(x) < 0$ a $f'(y) > 0$. Z (iii) pak plyne, že f je rostoucí na levém okolí b a klesající na pravém okolí a.