Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

Jméno a příjmení: ______________________ Cvičící: ______________________

Otázka	1	2	3	**Body**
Maximum bodů	8	6	6	20
Získané body				

[8] 1. Buď f omezená funkce na intervalu $[0,1]$.

- Definujte pojem **dělení intervalu** $[0,1]$.
- Definujte horní a dolní Riemannovy součty pro funkci f.
- Formulujte a dokažte tvrzení o monotonii horních a dolních Riemannových součtů.
- Definujte horní a dolní Riemannův integrál a Riemannův integrál.
- Spočtěte z definice Riemannova integrálu

$$(\mathcal{R})\int_0^1 x\,dx.$$

- Ukažte z definice, že Riemannův integrál Dirichletovy funkce neexistuje.

Řešení:

- Dělením D intervalu $[0,1]$ nazveme $(n+1)$ libovolných čísel x_i, $i = 0,\dots,n$ splňujících $0 = x_0 < x_1 < \dots, x_{n-1} < x_n = 1$.
- Označme $m_i := \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ a $M_i := \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$. Dolní Riemannův součet definujeme jako

$$s(D,f) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

a horní Riemannův součet definujeme jako

$$S(D,f) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

- Nechť D je libovolné dělení. Nechť D' je jeho zjemnění. Potom platí

$$s(D,f) \le s(D',f) \le S(D',f) \le S(D,f).$$

. Navíc, nechť D_1 a D_2 jsou dvě jakákoliv dělení, potom platí

$$s(D_1,f) \le S(D_2,f).$$

Dokážeme první tvrzení pro zjemnění vzniklé přidáním jednoho bodu (přidání dalších bodů se udělá obdobně). Nechť D je dělení sestávaicí z bodů $x_0, \dots, x_n$. Ňechť dělení D' vznikne přidáním bodu $y \in (x_{j-1}, x_j)$. Protože

$$\inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} f(x) \leq \min\{\inf_{x\in[x_{j-1},y]} f(x), \inf_{x\in[y,x_j]} f(x)\}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} s(D,f) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i\neq j} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_j(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{i\neq j} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_j(y - x_{j-1}) + m_j(x_j - y) \\ &\leq \sum_{i\neq j} m_i(x_i - x_{i-1}) + \inf_{x\in[x_{j-1},y]} f(x)(y - x_{j-1}) + \inf_{x\in[y,x_j]} f(x)(x_j - y) \\ &= s(D', f). \end{aligned}$$

Obdobně se dostane i nerovnsot pro horní součty. Pro libovolná dělení D_1 a D_2 defiujmeme zjemnění D obou dělení jako $D := D_1 \cup D_2$. Potom z předchozí nerovnosti máme

$$s(D_1, f) \leq s(D, f) \leq S(D, f) \leq s(D_2, f).$$

- Horní a dolní Riemannův integrál jsou definovány následovně:

$$(\mathcal{R})\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = \inf_D S(D,f), \qquad (\mathcal{R})\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = \sup_D s(D,f).$$

  Suprema a infima se uvažují přes libovolná dělení intervalu $[0,1]$.

- Spočtěte z definice Riemannova integrálu

$$(\mathcal{R})\int_0^1 x\,dx.$$

  Pokud označíme $f(x) := x$. Pro jakékoliv dělení pak dostaneme $m_i = x_{i-1}$ a $M_i = x_i$. Dostaneme tak

$$s(D,f) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}(x_i - x_{i-1}), \qquad S(D,f) = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - x_{i-1}).$$

  Nyní po jednoduchých úpravách máme:

$$\begin{aligned} s(D,f) &= \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}x_i - x_{i-1}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - x_{i-1}^2 - (x_i - x_{i-1})^2 \\ &= \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})^2 \leq \frac{1}{2} \\ S(D,f) &= \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - x_{i-1}x_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - x_{i-1}^2 + (x_i - x_{i-1})^2 \\ &= \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})^2 \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Protože

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |D|(x_i - x_{i-1}) = |D|,$$

kde je norma dělení. Vidíme, že

$$s(D,f) \nearrow \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad S(D,f) \searrow \frac{1}{2} \quad \text{pro } |D| \to 0 \quad \Longrightarrow (\mathcal{R}) \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

- V případě Dirichletovy funkce platí $m_i = 0$ a $M_i = 1$ pro každé $i = 1, \ldots, n$. Proto jakýkoliv spodní součet je roven nule a tedy i spodní integrál je roven nule. Obdobně, horní součet je roven jedné a tedy i horní integrál je rovne jedné.

[6] 2.

- Zformulujte Lagrangeovu větu o střední hodnotě a větu dokažte.
- Buď f funkce na omezeném intervalu $[a, b]$). Zadefinujte pojem jednostrannné derivace $f'(a_+)$.
- Nechť existuje vlastní derivace $f'(x)$ pro každé $x \in (a, b)$. Za jakých předpokladů platí
$$f'(a+) = \lim_{x \to a_+} f'(x)?$$
Tvrzení dokažte.
- Uveďte příklad funkce, pro kterou výše uvedená rovnost neplatí.

Řešení:

- Buď $f \in \mathcal{C}([a, b])$ taková, že pro každé $x \in (a, b)$ existuje vlastní $f'(x)$. Ptom existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$
Důkaz: Definujeme funkci F
$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$
Tato funkce je spojitá a navíc splňuje $F(b) = F(a) = 0$. Dle Roellovy věty tedy musí existovat $\xi \in (a, b)$ takové , že $F'(\xi) = 0$. Přímý výpočet pak dává
$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$
Důkay je hotov.
- Jednostranná derivace je definovaná jako
$$f'(a_+) := \lim_{x \to a_+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$
- Je potřeba přidat předpoklad, že $\lim_{x \to a_+} f'(x)$ existuje.
Důkaz: Buď $x > a$ libovolné. Dle Lagrangeovy věty pak existuje $\xi \in (a, x)$
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi).$$
Limitní přechod $x \to a_+$ na levé straně vede k derivaci zprava v bodě a. Pokud tedy existuje $\lim_{x \to a_+} f'(x)$ pak z výše uvedené rovnosti plyne, že se musí rovnat $f'(a_+)$.
- Protipříklad výše uvedeného je např $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ dodefinované v nule nulou. Z definice máme $f'(0) = 0$. Ale $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x^2)$. Tato funkce ale nemá limitu v 0.

[6] 3. Buď (a, b) omezený interval a f definovaná na (a, b). Definujte pojmy:

- f je spojitá na (a, b)
- f je stejnoměrně spojitá na (a, b)

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení. Tvrzení buď dokažte, nebo uveďte protipříklad.

(i) f je spojitá na (a, b) $\implies$ f je omezená na (a, b)

(ii) f je spojitá a omezená na (a, b) $\implies$ f je stejnoměrně spojitá na (a, b).

(iii) f je spojitá na (a, b) a existují vlastní jednostranné limity $\lim_{x\to a_+} f(x)$ a $\lim_{x\to b_-} f(x)$ $\implies$ f je stejnoměrně spojitá na (a, b).

(iv) f je stejnoměrně spojitá na (a, b) $\implies$ f nabývá na (a, b) globální extrémy.

Řešení:

Buď (a, b) omezený interval a f definovaná na (a, b). Definujte pojmy:

- f je spojitá na (a, b) $\iff$

$$\forall x_0 \in (a, b)\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in (a, b)\, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

- f je stejnoměrně spojitá na (a, b) $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \in (a, b)\, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení. Tvrzení buď dokažte, nebo uveďte protipříklad.

(i) NE: např funkce $f(x) := 1/x$ na intervalu $(0, 1)$.

(ii) NE: např. funkce $f(x) := \sin(1/x)$ na intervalu $(0, 1)$. Definujme $x_k := \frac{1}{2k\pi}$, $y_k := \frac{1}{(2k+1)\pi}$. Potom $|f(x_k) - f(y_k| = 2$, ale $|x_k - y_k| \le 1/k$. Funkce tedy nemůže být stejnoměrně spojitá.

(iii) ANO: Pokud existují jednostranné vlastní limity, můžeme funkci f dodefinovat v bodech a a b

$$f(a) := \lim_{x\to a_+} f(x), \qquad f(b) := \lim_{x\to b_-} f(x).$$

Takto dodefinovaná f je spojitá na $[a, b]$. Dle Cantorovy věty je i stejnoměrně spojitá.

(iv) NE: např $f(x) := x$. Potom $\sup_{x\in(0,1)} f(x) = 1$ a $\inf_{x\in(0,1)} f(x) = 0$. Ale funkce f hodnot 0 a 1 nenabývá na intervalu $(0, 1)$.