Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

Jméno a příjmení: ______________________ Cvičící: ______________________

Otázka	1	2	3	**Body**
Maximum bodů	7	6	7	20
Získané body				

[7] 1.
- Zformulujte Darbouxovu větu o nabývaní mezihodnot.
- Větu dokažte.
- Buď f spojitá reálná funkce zobrazující interval $[0,1]$ na $[0,1]$. Dokažte, že existuje $x \in [0,1]$ tak, že $f(x) = x$. Nápověda: Uvažujte funkci $g(x) := x - f(x)$ a použijte výše dokázané.

Řešení:

- Darbouxova věta o nabývaní mezihodnot: Buď $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Buď $f(a) \leq f(b)$. Potom pro každé $\gamma \in (f(a), f(b))$ existuje $c \in (a,b)$ takové, že $f(c) = \gamma$.
- Důkaz: Můžeme předpokládat, že $f(a) < f(b)$. Definujme množinu $M := \{x \in [a,b],\ f(x) < \gamma\}$. Protože $f(a) < \gamma < f(b)$ a funkce je spojitá, existuje $\delta > 0$ tak, že $[a, a+\delta) \subset M$ a $M \cap (b-\delta, b] = \emptyset$. Proto existuje

  $$c := \sup M$$

  a $c \in (a,b)$. Ukážeme, že $f(c) = \gamma$.

  Předpokládejme, že $c \in M$ a tedy c musí být maximem množiny M a tedy každé $x > c$ splňuje $x \notin M$. Potom $f(c) < \gamma \leq f(x)$ pro každé $x \in (c,b)$. Funkce je ale spojitá a tedy $f(c) < \gamma \leq \lim_{x\to c+} f(x) = f(c)$. To je ale spor.

  Předpokládejme naopak že $c \notin M$, tedy $f(c) \geq \gamma$. Z definice suprema ale plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in M$ takové, že $x_n \in (c - 1/n, n)$. Potom tedy ale $f(x_n) < \gamma$. Ze spojitosti f, vlastnosti $x_n \to c$ pro $n \to \infty$ a Heineho věty získáme

  $$f(c) \geq \gamma \geq f(x_n) \to f(c)$$

  a tedy $f(c) = \gamma$.
- Uvažujme funkci g z nápovědy. Funkce je spojitá a proto nabývá všech mezihodnot. Protože

  $$g(0) = 0 - f(0) \leq 0, \qquad g(1) = 1 - f(1) \geq 0,$$

  vidíme, že $g(0) \leq 0 \leq g(1)$. Proto musí existovat $x \in [0,1]$ takové, že $g(x) = 0$. Tím je důkaz hotov.

[6] 2. Uvažujte funkci $f(x) = e^{\sin x} + \tan x : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$.

- Dokažte, že existuje inverzní funkce $f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, která je $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
- Zformulujte větu o derivaci inverzní funkce, kterou jste použili, a větu dokažte. (Můžete předpokládat spojitost inverzní funkce)
- Spočtěte $(f^{-1})'(1)$.

Řešení:

Uvažujte funkci $f(x) = e^{\sin x} + \tan x : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$.

- Dokažte, že existuje inverzní funkce $f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, která je $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

  Funkce f je zcela jistě spojitá na $(-\pi/2, \pi/2)$. Navíc

  $$f'(x) = e^{\sin x} \cos x + \frac{1}{\cos^2 x},$$

  což je také spojitá funkce.

  Navíc $f' > 0$ na $(-\pi/2, \pi/2)$ a tedy je rostoucí. Protože $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} f(x) = -\infty$ a $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} f(x) = \infty$, potom vidíme, že f zobrazuje $(-\pi/2, \pi/2)$ prostě na $\mathbb{R}$. Protože, f' existuje a f^{-1} je spojitá (spojitost plyne z faktu, že f zobrazuje interval na interval), bude existovat derivace inverzní funkce, která splňuje

  $$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

  Spojitost $(f^{-1})'$ plyne z věty o spojitosti složeneé funkce, ze spojitosti f a spojitosti f'.

- Věta: Buď $\alpha, \beta > 0$ a f takové, že f zobrazuje $(-\alpha + x, \alpha + x)$ na $(-\beta + f(x), \beta + f(x))$. Nechť f^{-1} je spojitá v $f(x)$ a nechť existuje vlastní a nenulová $f'(x)$. Potom

  $$(f^{-1})(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

  Důkaz: Protože $f'(x) \neq 0$, víme, že existuje $P_\delta(x)$ tak, že pro každé $z \in P_\delta(x)$ platí

  $$\left| \frac{|f(z) - f(x)|}{|z - x|} \right| >\geq \frac{|f'(x)|}{2} > 0.$$

  Pro $z \in U_\delta(x)$ pak můžeme smysluplně definovat pomocnou funkci

  $$g(z) := \begin{cases} \dfrac{z - x}{f(z) - f(x)} & \text{pro } z \in P_\delta(x), \\ \dfrac{1}{f'(x)} & \text{pro } z = x. \end{cases}$$

  Z definice plyne, že g je spojitá v bodě x. Poté máme

  $$(f^{-1})'(f(x)) = \lim_{y \to f(x)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x))}{y - f(x)} = \lim_{y \to f(x)} \frac{f^{-1}(y) - x}{f(f^{-1}(y)) - f(x)}$$
  $$= \lim_{y \to f(x)} g(f^{-1}(y)) \underbrace{=}_{g \text{ je spojitá v } x} g(\lim_{y \to f(x)} f^{-1}(y)) \underbrace{=}_{f^{-1} \text{ je spojitá v } f(x)} g(f^{-1}(f(x)))$$
  $$= g(x) = \frac{1}{f'(x)}.$$

- Nejdříve si uvědomíme, že $1 = f(0) \implies f^{-1}(1) = 0$. Poté jen stačí použít výše uvedený vzorec:

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1})(1)} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{e^{\sin 0}\cos 0 + \frac{1}{\cos^2 0}} = \frac{1}{2}.$$

[7] 3.

1 Zformulujte Bolzano–Cauchyovu podmínku pro posloupnosti a ukažte její ekvivalenci s existencí vlastní limity.

2 Buď f definovaná na $\mathbb{R}$, která pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňuje $f(x) \leq f(x+1)$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení. Tvrzení buď dokažte, nebo uveďte protipříklad.

(i) existuje $L \in \mathbb{R}^*$ takové, že
$$L = \lim_{x\to\infty} f(x).$$

(ii) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $L \in \mathbb{R}^*$ takové, že
$$L = \lim_{n\to\infty} f(x+n).$$

(iii) Buď f omezená na $\mathbb{R}$. Potom platí
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall m, n \in \mathbb{N}, \qquad m, n > n_0 \implies |f(n) - f(m)| \leq \varepsilon.$$

Řešení:

1 Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost. Řekneme, že splňuje B-C podmínku právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > n_0$ platí $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Ukážeme, že (B-C) je ekvivalentní tvrzení: existuje $L \in \mathbb{R}$ tak, že $L = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Nejdříve ukážeme, že existence limity implikuje (B-C). Protože
$$|a_n - a_m| \leq |a_n - L| + |a_m - L|,$$
je důkaz zřejmý.

Ukážeme opačnou implikaci. Nejdříve použijeme (B-C) s $\varepsilon = 1$. Pak určitě platí pro nějaké n_0, že pro každé $n > n_0$
$$|a_n - a_{n_0+1}| \leq 1$$
a tedy a_n je omezená od n_0. Z Weierstrassovy věty tedy získáme existenci podposloupnosti, která má vlastní limitu, nebo-li
$$L = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}.$$

Nyní
$$|a_n - L| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - L|$$
a tedy. Pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme n_0 tak, že $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$ pokud $n, m > n_0$ a $|a_{n_k} - L| < \varepsilon/2$ pokud $n_k > n_0$. První nerovnost můžeme zajistit díky (B-C) a druhou nerovnost díky existenci limity L.

2 (i) NE. Např funkce $f(x) := 0$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ a $f(x) = x$ pro $x \in \mathbb{Z}$. Pro tuto funkci limita neexistuje.

(ii) ANO. Pro každé x je posloupnost $a_n := f(x+n)$ neklesající a má tedy limitu (možno i nevlastní).

(iii) ANO. Pokud zadefinujeme pospoupnost $a_n := f(n)$ pak je to posloupnost omezená a neklesající, musí mít tedy vlastní limitu. Protože má posloupnost vlastní limitu, musí splňovat (B-C) podmínku, což je ve skutečnosti žádané tvrzení.