Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

Jméno a příjmení: ______________________ Cvičící: ______________________

Otázka	1	2	3	**Body**
Maximum bodů	7	7	6	20
Získané body				

[7] 1.
- Zformulujte obě věty o limitě složené funkce.
- Věty **pečlivě** dokažte.
- Buď R Riemannova funkce. Rozhodněte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} R(\sin x), \qquad \lim_{x\to\frac{1}{2}} \sin(R(x)), \qquad \lim_{x\to 0} R\left(\frac{1}{2} + x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Bez důkazu můžete použít všechna tvrzení o Riemannově funkci dokázaná na přednášce.
Nápověda: Riemannova funkce je definována jako

$$R(x) := \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (0,1)\setminus\mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q} & \text{pro } x = \frac{p}{q} \text{ kde } p,q \in \mathbb{N} \text{ jsou nesoudělná a } p < q. \end{cases}$$

Řešení:

Nejdříve zformulujeme věty o limitě složené funkce. Vše zformulujeme v jedné obecné větě:

Buď $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tak, že

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \qquad \lim_{y\to A} g(y) = B. \tag{$\mathcal{A}$}$$

Potom

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = B,$$

pokud platí alespoň jedna ze dvou následujících podmínek:

1 existuje $P_{\delta^*}(x_0)$ takové, že pro každé $x \in P_\delta(x_0)$ platí $f(x) \neq A$;

2 platí $g(A) = B$.

Důkaz: Díky $(\mathcal{A})$ víme, že

$$\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists \delta_1 > 0\ x \in P_{\delta_1}(x_0) \implies f(x) \in U_{\varepsilon_1}(A), \tag{$\mathcal{A}_1$}$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0\ \exists \delta_2 > 0\ y \in P_{\delta_2}(A) \implies g(y) \in U_{\varepsilon_2}(B). \tag{$\mathcal{A}_2$}$$

Naším cílem je ukázat

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ x \in P_\delta(x_0) \implies g(f(x)) \in U_\varepsilon(B). \tag{$\mathcal{A}_3$}$$

Pro dané $\varepsilon > 0$ pevné, tedy nejdříve volíme $\varepsilon_2 := \varepsilon$ v $(\mathcal{A}_2)$. K tomu najdeme $\delta_2 > 0$ tak, že pokud $y \in P_{\delta_2}(A)$, pak $g(y) \in U_\varepsilon(B)$. Nyní v $(\mathcal{A}_1)$ volíme $\varepsilon_1 := \delta_2$ a pak můžeme najít $\delta_1 > 0$ tak, že pokud $x \in P_{\delta_1}$, pak $f(x) \in U_{\delta_2}(A)$.

Je tedy vidět, že pokud $f(x) \neq A$, pak platí, že $f(x) \in P_{\delta_2}(A)$ a tedy $g(f(x)) \in U_\varepsilon$. Nicméně fakt, že $f(x) \neq A$ pokud $x \in P_\delta(x_0)$ plyne z předpokladu [1] zvolením $\delta := \min\{\delta_1, \delta*\}$.

V případě, kdz předpokládáme [2], pokud $f(x)A$, pak $g(f(x)) = g(A) = B$ a tedy není, co řešit.

Lmity: Z přednášky víme, že

$$\lim_{y \to y_0} R(y) = 0$$

pro každé $y_0 \in (0, 1)$.

Potom tedy víme, že

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} R(\sin x) = 0,$$

protože sin je prostá funkce v okolí $\pi/6$ a tedy můžeme použít variantu [1] z předchozí věty. (Pozor, chybná by byla úvaha $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} R(\sin x) = R(\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \sin x) = R(1/2) = 1/2$)

Podobně

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \sin(R(x)) = 0,$$

protože sin je spojitá funkce.

Naopak ale, na

$$\lim_{x \to 0} R\left(\frac{1}{2} + x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

nelze použít ani [2] (R není spojitá), ani [1] (protože pro jakékoliv okolí $P_\delta(0)$ existuje $x \in P_\delta(0)$ tak, že $\frac{1}{2} + x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$. Ukážeme, že poslední limita neexistuje. Definujme

$$x_n := \frac{1}{2n\pi}, \quad y_n := \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}.$$

Vidíme, že $x_n \to 0$ a $y_n \to 0$ a Potom tedy

$$\lim_{n \to \infty} R\left(\frac{1}{2} + x_n \sin\left(\frac{1}{x_n}\right)\right) = \lim_{n \to \infty} R\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

ale i

$$\lim_{n \to \infty} R\left(\frac{1}{2} + y_n \sin\left(\frac{1}{y_n}\right)\right) = \lim_{n \to \infty} R\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right) = \lim_{y \to \frac{1}{2}} R(y) = 0.$$

a vidíme, že původní limita nemůže existovat.

[7] 2.

- Zadefinujte zobecněný Newtonův integrál.
- Zformulujte větu o rovnosti zobecněného Newtonova integrálu a Riemannova integrálu a větu dokažte.
- Nalezněte funkce $f, g : (0,1) \to \mathbb{R}$ takové, že

$$\text{existuje } (\mathcal{N}) \int_0^1 f(x)\,dx \qquad \text{a} \qquad \text{neexistuje } (\mathcal{R}) \int_0^1 f(x)\,dx,$$

$$\text{neexistuje } (\mathcal{N}) \int_0^1 g(x)\,dx \qquad \text{a} \qquad \text{existuje } (\mathcal{R}) \int_0^1 g(x)\,dx.$$

Řešení:

- Zobecněný Newtonů integrál: Buď $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Řekneme, že F je zobecněná primitivní funkce k f na (a,b) pokud $F \in \mathcal{C}((a,b))$ a pokud existuje konečná množina K tak, že pro každé $x \in (a,b) \setminus K$ platí $F'(x) = f(x)$. Potom definujeme

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b_-} F(t) - \lim_{u \to a_+} F(u),$$

  má li pravá strana smysl.

- Věta: Pokud zobecněný Newtonův integrál a Riemannův integrál funkce f na (a,b) existují, pak jsou si rovny.

  Důkaz: Existuje zobecněná primitivní funkce F tak, že $F'(x) = f(x)$ pro $x \in (a,b) \setminus K$, kde K je konečná. Stejně tak, z vlastnosti Riemannova integálu plyne, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D' tak, že

$$s(D') > (\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon, \qquad S(D') < (\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon.$$

  Definujme zjemnění $D := D \cup K$. Potom použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě nafunkci F (ta je spojitá a má derivaci ve všech bodech kromě množiny K)

$$F(x_j) - F(x_{j-1}) = f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}), \qquad \text{pro nějaké } \xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$$

  a

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^n F(x_j) - F(x_{j-1} = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \begin{cases} \le S(D) \le S(D'), \\ \ge s(D) \ge s(D') \end{cases}$$

$$\begin{cases} \le (\mathcal{R}) \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon, \\ \ge (\mathcal{R}) \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon. \end{cases}$$

  Nakonec můžeme položit $\varepsilon \to 0_+$ a důkaz je hotov.

- Za funkci f stačí volit $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$. Potom, jakýkoliv horní Riemannův součet je roven nekonečnu a tedy Riemannův integrál neexistuje. Na druhou stranu

$$(\mathcal{N}) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{x \to 1_-} 2\sqrt{x} - \lim_{x \to 0_+} 2\sqrt{x} = 2.$$

Funkci g pak stačí volit např. tak, aby byla monotónní, protože pak má Riemannův integrál, ale aby neměla zobecněnou primtivní funkci. Volme body $x_n := 1 - 2^{-n}$ pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Volme funkci

$$g(x) := x_n \text{ pokud } x \in [x_n, x_{n+1}]$$

Tato funkce je neklesající a má tak Riemannův integrál na $(0,1)$. Na druhou stranu potenciální primitivní funkce nemůže mít derivaci v bodech x_n, kterých je ale nekonečně.

[6] 3.

- Zadefinujte pojem Taylorův polynom stupně n pro funkci f v bodě x_0.
- Zformulujte a dokažte větu o Lagrangeově tvaru zbytku.
- Odvoďte tvar Taylorova polynomu stupně 4 v bodě $x_0 = 0$ funkce $g(x) := \sqrt{1+x}$ a odvoďte i Lagrangeův tvar zbytku.
- Spočtěte $\sqrt{\frac{3}{2}}$ s chybou menší než 1/1000.

Řešení:

- Buď funkce f definovaná na okolí x_0, pro kterou existuje $f^{(n]}(x_0)$. Taylorův polynom stupně n pro funkci f v bodě x_0 definujeme jako

$$P_n(x) := \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

- Věta o Lagrangeově tvaru zbytku: Buď $f \in \mathcal{C}^n([x_0,x])$ a pro každé $\xi \in (x_0,x)$ nechť existuje vlastní $f^{(n+1)}(\xi)$. Potom pro $R_{n+1}(x) := f(x) - P_n(x)$ platí, že existuje $\xi \in (x_0,x)$ takové, že

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Důkaz: Definujme pomocnou funkci $F(t) := f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i$. Potom $R_{n+1}(x) = F(x_0)$ a $F(x) = 0$. Derivace F je

$$F'(t) = -\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i\right)' = -\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i+1)}(t)}{i!}(x-t)^i + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{(i-1)!}(x-t)^{i-1}$$
$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

Nyní pro funkcí $\phi(t) := (x-t)^{n+1}$ použijeme Cauchyovu větu o střední hodnotě následovně: existuje $\xi \in (x_0,x)$

$$-R_{n+1}(x) = F(x) - F(x_0) = \frac{F'(\xi)}{\phi'(\xi)}(\phi(x) - \phi(x_0)) = -\frac{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{(n+1)(x-\xi)^n}(x-x_0)^{n+1})$$
$$-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

což je kýžený závěr.

- Postupně spočítáme několik derivací funkce g

$$g'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, \qquad g''(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, \qquad g'''(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \ldots$$
$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(1+x)^{\frac{-2n+1}{2}}}{2^n}\Pi_{i=0}^{n-1}(2i-1)$$

Po dosazení bude tedy Taylorův polynom ve tvaru

$$P_4(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{2^7}x^4 + R_5(x)$$

kde pro nějaké $\xi \in (1, x)$

$$R_5(x) = \frac{(1+\xi)^{-\frac{9}{2}} 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^5 5!} x^5 \leq \frac{7}{2^8} x^5.$$

- Dosazením $x = \frac{1}{2}$ do výše uvedeného máme

$$\sqrt{\frac{3}{2}} = g(\frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} - \frac{5}{2^{13}} + \frac{(1+\xi)^{-\frac{9}{2}} 7}{2^{13}},$$

kde $\xi \in (0, 1/2)$. Poslední člen je menší než $1/1000$ a máme tedy hotovo.