Každý krok musí být **podrobně** zdůvodněn. Pokud použijete nějaké tvrzení z přednášky, **nezapomeňte** ověřit předpoklady.

Jméno a příjmení: ______________________ Cvičící: ______________________

Otázka	1	2	3	**Body**
Maximum bodů	8	6	6	20
Získané body				

[8] 1. Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel. Zadefinujte pojmy

A) omezená posloupnost,

B) monotónní posloupnost,

C) posloupnost splňující Bolzanovu–Cauchyovu podmínku.

Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení. Tvrzení buď dokažte, nebo najděte protipříklad.

1) posloupnost je monotónní $\implies$ existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} a_n$

2) posloupnost je monotónní a omezená $\iff$ posloupnost splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rostoucí funkce a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost a existuje vlastní limita $\lim_{n\to\infty} a_n \implies$ existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$.

Řešení:

A) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená $\iff$ existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq K$

B) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní (nerostoucí, či neklesající - uvedeme definici neklesající) $\iff$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq a_{n+1}$

C) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku $\iff$ pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m \in \mathbb{N}$ splňující $m, n > n_0$ platí $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$.

Platnost tvrzení:

1) Neplatí: např. $a_n := n$, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

2) Implikace " $\Longleftarrow$ "neplatí: např. $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$. Tato posloupnost není monotónní, ale přesto splňuje B-C podmínku.

Implikace " $\Longrightarrow$ "platí: Předpokládejme, že posloupnost je neklesající. Protože je omezená, existuje $L \in \mathbb{R}$ tak, že $L := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Tedy z definice suprema víme, že $a_n \leq L$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a také víme, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že $a_{n_0} > L - \varepsilon$. Protože posloupnost je neklesající, máme tedy, že pro každé $n > n_0$ platí $L \geq a_n \geq a_{n_0} \geq L - \varepsilon$ a tedy $|L - a_n| \leq \varepsilon$.

Použitím trojúhelníkové nerovnsoti pak dostaneme

$$|a_n - a_m| \leq |L - a_n| + |L - a_m|$$

a tedy není těžké ověřit platnost B-C podmínky.

3) Neplatí: Uvažujme např. funkci

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{pro } x \leq 1, \\ x+1 & \text{pro } x > 1. \end{cases}$$

a posloupnost

$$a_n := 1 + \frac{(-1)^n}{n}.$$

Funkce f je rostoucí a limita $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Limita $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ ale neexistuje, protože

$$\lim_{k\to\infty} f(a_{2k}) = \lim_{k\to\infty} f(1 + \frac{1}{2k}) = \lim_{k\to\infty} 2 + \frac{1}{2k} = 2,$$
$$\lim_{k\to\infty} f(a_{2k+1}) = \lim_{k\to\infty} f(1 - \frac{1}{2k+1}) = \lim_{k\to\infty} 1 - \frac{1}{2k+1} = 1.$$

Limita tedy nemůže existovat.

[6] 2. a) Definujte pojmy: **primitivní funkce** a **zobecněná primitivní funkce** na otevřeném intervalu a definujte pojem **Newtonův integrál**.

b) Uvažujte funkci $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definovanou následovně (zde $n \in \mathbb{N}$)

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{pokud } x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \\ 0 & \text{pokud } x = 0, \\ \frac{1}{n} & \text{pokud } x \in \left[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1},\right). \end{cases}$$

Rozhodněte a **zdůvodněte**, zda existují

$$(\mathcal{N}) \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \qquad \text{a} \qquad (\mathcal{R}) \int_{-1}^{1} f(x)\, dx.$$

c) Pokud jste k důkazu existence použili nějakou větu, tak jí **zformulujte** a **pečlivě dokažte**.

Řešení:

a) Buď I otevřený interval a $f : I \to \mathbb{R}$ funkce. Řekneme, že F je primitivní funkcí k f na I právě tehdy, když pro každé $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

Řekneme, že F je zobecněnou primitivní funkcí k f na I, pokud F je spojitá na I a pokud existuje konečná množina K tak, že pro každé $x \in I \setminus K$ platí $F'(x) = f(x)$.

Newtonův integrál je pak definofán následovně:

$$(\mathcal{N}) \int_{0}^{1} f(x)\, df = \lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x).$$

b) Newtonův intefrál **neexistuje:** Důvod je ten, že f nemá zobecněnou primitivní funkci. Vskutku, předpokládejme pro spor, že f má zobecněnou primitivní funkci F. Buď $x_0 := \frac{1}{n}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že F nemá derivaci v x_0. Protože těctho bodů je nekonečně, nemůže být F zobecněná primitivní funkce. Pokud by totiž $F'(x_0)$ existovala, pak by muselo platit (protože obě limity existují):

$$F'(x_0) = \lim_{x \to (x_0)_+} F'(x) = \lim_{x \to (x_0)_+} f(x) = \frac{1}{n-1}$$

a i

$$F'(x_0) = \lim_{x \to (x_0)_-} F'(x) = \lim_{x \to (x_0)_-} f(x) = \frac{1}{n}.$$

Riemannův integrál **existuje:** Důvod je ten, že f je nerostoucí na $[-1, 0]$ a neklesající na $[0, 1]$. (Použijeme větu zformulovanou v c).)

c) **Věta:** Buď $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$. Buď $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ omezená a na každém intervalu (a_{i-1}, a_i) pro $i = 1, \ldots, n$ monotónní. Potom existuje

$$(\mathcal{R}) \int_{a}^{b} f(x)\, dx.$$

Důkaz: Nejdříve ukážeme, že pokud je f monotónní a omezená na intervalu, tak má i Riemannův integrál. Předpokládejme tedy, že f je neklesající. Potom evidentně platí
$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_i) \qquad \text{a} \qquad \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_{i-1}).$$
Pro jakékoliv dělení D dané body $a = x_0, x_i < x_n = b$ tedy máme
$$S(D) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{a} \qquad s(D) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$
a tedy i
$$S(D) - s(D) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}).$$
K existenci $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ stačí ukázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D takové, že
$$S(D) - s(D) < \varepsilon.$$
Budeme uvažovat pouze ekvidistantní dělení, tj. dělení splňující $x_i - x_{i-1} = (b - a)/n$. Potom
$$\begin{aligned} S(D) - s(D) &= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n}. \end{aligned}$$
Vidíme tedy, že pro dané $\varepsilon > 0$, stačí uvažovat ekvidistantní dělení splňující podmínku $n > \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$.

Nyní tvrzení zobecníme tak, abychom dostali znění věty. K existenci Riemannova integrálu opět stačí pro každé $\varepsilon > 0$ najít dělení D takové, že platí
$$S(D) - s(D) \le \varepsilon.$$
Buď $\varepsilon > 0$ dáno. Označíme $K := sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$ a potom zvolíme $\delta := \frac{\varepsilon}{8nK}$. Nyní na intervalech $(a_0, a_1 - \delta)$, $(a_1 + \delta, a_2 - \delta)$, ... víme, že Riemannův integrál existuje (funkce je tam monotónní), proto můžeme najít dělení D_i intervalu $(a_{i-1} + \delta, a_i - \delta)$ taková, že
$$S(D_i) - s(D_i) \le \frac{\varepsilon}{2n}.$$
Nakonec definujeme finální dělení D jako sjednocení všech uvažovaných bodů výše a pak platí
$$\begin{aligned} S(D) - s(D) = \sum_{i=1}^{n} S(D_i) - s(D_i) \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\left(\sup_{x\in[a_i-\delta,a_i+\delta]} f(x) - \inf_{x\in[a_i-\delta,a_i+\delta]} f(x)\right)(a_i + \delta - (a_i - \delta)) \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + 4\delta K n \le \varepsilon, \end{aligned}$$
čímž je důkaz hotov.

[6] 3. Nechť $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je reálná funkce. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení (uvažujte všechny implikace, každou implikaci buď dokažte nebo najděte protipříklad):

1) Funkce f má v $x_0 \in (a,b)$ vlastní limitu $\iff$ existuje $P_\delta(x_0)$ na kterém je f omezená.
2) $\infty > f'(x) > 0$ pro všechna $x \in (a,b)$ $\iff$ f je v (a,b) rostoucí a v (a,b) existuje vlastní $f'(x)$.
3) Pro nějaké $x_0 \in (a,b)$ platí $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$ $\iff$ f má v x_0 ostré lokální minimum a existují vlastní $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$.

Řešení:

1) Implikace " $\implies$ "platí: Z definice limity víme, že existuje $L \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \; x \in P_\delta(x_0) \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Zvolíme-li $\varepsilon := 1$, můžeme k němu najít $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in P_\delta(x_0)$ platí (použijeme i trojúhelníkovou nerovnost)

$$|f(x)| \leq |f(x) - L| + |L| \leq 1 + L$$

a funkce je tedy omezená na $P_\delta(x_0)$.

Implikace " $\Longleftarrow$ "neplatí: Uvažujme funkci $f(x) = \sin(1/x)$ na $P_\delta(0)$. Tato funkce je omezená, ale $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ neexistuje.

2) Implikace " $\implies$ "platí: Buď $a < x < y < b$. Použitím Lagrangeovy věty o střední hodnotě získáme, že pro nějaké $\xi \in (x,y)$

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x) > 0,$$

kde poslední nerovnost plyne z předpokladů.

Implikace " $\Longleftarrow$ "neplatí. Např. $f(x) = x^3$ je rostoucí funkce, která má všude derivaci, ale $f'(0) = 0$.

3) Implikace " $\implies$ "platí: Protože

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) > 0,$$

existuje $P_\delta(x_0)$ tak, že pro každé $x \in P_\delta(x_0)$ platí

$$0 < \frac{f''(x_0)}{2} \leq \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(x)}{x - x_0},$$

kde jsme využili fakt, že $f'(x_0) = 0$. Z výše uvedené nerovnosti tedy plyne, že $f'(x) > 0$ na $P_\delta^+(x_0)$ a $f'(x) < 0$ na $P_\delta^-(x_0)$. Tedy funkce f je klesající na $P_\delta^-(x_0)$ a je rostoucí na $P_\delta^+(x_0)$. Funkce má tedy v x_0 lokální ostré minimum.

Implikace " $\Longleftarrow$ "neplatí. Např. $f(x) := x^4$ má v 0 ostré minimum, ale $f'(0) = f''(0) = 0$.