

OPRAVA 10 DEFINICI LEBSGOOVA INT ①

Prostor L^+ - množina reálných f

Považaj $f = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$, kde $h_n \nearrow f$ s.v.

$$\exists \lim \int_I h_n \in \mathbb{R}$$

$$\text{Pak } \int_I f := \lim \int_I h_n$$

Vždyť je pro L^+ zmostení v platnosti

s minimální hodnotou v daném.

Prostor L : NOVA DEFINICE

Řekneme, že $f \in L$ (f je Lebesgueův integrální)

$$(\Leftrightarrow) \exists u, v \in L^+, \text{ takové, že}$$

$$f = u - v \quad \text{s.v.}$$

$$\text{Definice } \int_I f := \int_I u - \int_I v$$

Poznámka (nábyl) $\int f$ - rozdílní na rozdíl

$$\text{pokud } f = u - v = u_1 - v_1, \quad u, u_1, v, v_1 \in L$$

$$\text{Pak } \int f = \int u - \int v = \int u_1 - \int v_1 \quad ?$$

Věta 3.5 $f, g \in L, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ potom

(2)

(i) $\alpha f + \beta g \in L$ a $S(\alpha f + \beta g) = \alpha S f + \beta S g$

(ii) $f \geq g$ s.v. $\Rightarrow S f \geq S g$

$f = g$ s.v. $\Rightarrow S f = S g$

(iii) $f^+, f^-, f^+, f^-, \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in L$

(iv) ~~$f \in L$~~ $|f| \in L$ a $|S f| \leq S|f|$

(v) f je konečný s.v.

Důk Bud' $f = f_1 - f_2, g = g_1 - g_2$, kde $f_i \in L^+, g_i \in L^+$

$(\alpha^+ := \max(0, \alpha))$
 $\alpha^- := |\alpha| - \alpha^+$

(i) Potom

$$\alpha f + \beta g = \alpha^+ f - \alpha^- f + \beta^+ g - \beta^- g$$

$$= \alpha^+ f_1 - \alpha^+ f_2 - \alpha^- f_1 + \alpha^- f_2 + \beta^+ g_1 - \beta^+ g_2 - \beta^- g_1 + \beta^- g_2$$

$$= \underbrace{(\alpha^+ f_1 + \alpha^- f_2 + \beta^+ g_1 + \beta^- g_2)}_{\cap L^+} - \underbrace{(\alpha^+ f_2 + \alpha^- f_1 + \beta^+ g_2 + \beta^- g_1)}_{\cap L^+}$$

$\Rightarrow \alpha f + \beta g \in L$

a rovnost integrálů platí

$$(ii) \quad f = f_1 - f_2, \quad g = g_1 - g_2 \quad f_1, g_1 \in L^+$$

(3)

$$f_1 - f_2 \geq g_1 - g_2 \quad \text{s.t.}$$

$$f_1 + g_2 \geq f_2 + g_1 \quad \text{s.t.}$$

$$\underbrace{f_1}_{\in L^+} \quad \underbrace{g_2}_{\in L^+}$$

$$\text{by 3.3.} \quad \Rightarrow \quad S f_1 + S g_2 = S f_1 + g_2 \geq S f_2 + g_1 = S f_2 + S g_1$$

$$\Rightarrow \quad S f = S f_1 - S f_2 \geq S g_1 - S g_2 = S g \quad \square$$

$$(iii) \quad \text{ad } f^+ \in L; \quad f = f_1 - f_2, \quad f_1, f_2 \in L^+$$

$$f^+ = \max \{f_1 - f_2, 0\} = \max \{f_1, f_2\} - f_2$$

$$\text{By 3.3} \quad f_1 \in L^+, f_2 \in L^+ \Rightarrow \max \{f_1, f_2\} \in L^+$$

$$\Rightarrow \quad f^+ := \max \{f_1, f_2\} - f_2$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ f_1^+ \in L^+ \end{array} \quad \begin{array}{c} \parallel \\ f_2^- \in L^+ \end{array} \quad a$$

$$\text{hence} \quad S f^+ = S \max \{f_1, f_2\} - S f_2$$

$$f^- = f^+ - f \Rightarrow f \in L$$

$$|f| = f^+ + f^- \Rightarrow |f| \in L$$

④

$$\max \{a, b\} = \frac{1}{2} (a + b + |a - b|)$$

$$\min \{a, b\} = \frac{1}{2} (a + b - |a - b|)$$

ale dle predložky $|a - b| \in L$

$$\Rightarrow \max \{a, b\} \in L$$

$$\text{ad (iv)} \quad -|a| \leq a \leq |a| \quad \text{s.t.}$$

$$-|a| \leq a \leq |a| \quad \Rightarrow \quad |a| \leq |a|$$

Proč?

• •

POSLEDNÍ ZÁMĚNA: DL LEVIHO VĚTY 35.

(5)

VĚTA

LEVI (3.8) Buď $f_n \in L$ a $f_n \nearrow f$ s.r. a

$$\exists A > 0 \quad \forall n \quad \int f_n \leq A.$$

$$\text{Potom } \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f \quad \text{a } f \in L$$

VĚTA (3.8⁺) LEVI PRO RAOY

Buď $g_n \in L$ takové, že

a) $g_n \geq 0$ s.r. na I

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \int g_n$ — konverguje

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ konverguje s.r. na I k funkci g a platí

$$g \in L \quad \text{a} \quad \int_I g = \int_I \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n$$

POUČENÍ VĚTY (3.5⁺) Buď $f \in L$ a $\varepsilon > 0$ libovolné

1) $\exists u, v \in L^+$ takové, že $f = u - v$ i $v \geq 0$ a $\int_I v \leq \varepsilon$

2) $\exists$ shodující funkce s a funkce $g \in L$ tak, že $f = s + g$

$$\text{a} \quad \int_I |g| \leq \varepsilon$$

VĚTA 35⁺ říká, že jakákoli $f \in L$ se dá "sčítelně blízko" aproximovat funkcemi z L^+

DK (3.5)* $f \in L \Rightarrow f = u - v, u, v \in L$ (9)

$\Rightarrow \exists h_n$ -polynomial density f.a. $h_n \nearrow g$ s.v. $\wedge \int g = \lim \int h_n$

$\Rightarrow \forall \varepsilon \exists n_0 \int_I |g - h_{n_0}| = \int_I g - h_{n_0} \leq \varepsilon$

Definiere $v := g - h_{n_0}$

Perk $h_n - h_{n_0} \nearrow v$ s.v.
SCHRITT 1B'

$\wedge \int_I v \leq \varepsilon$

Monic $f = u - v = u - h_{n_0} - (g - h_{n_0}) = (u - h_{n_0}) - v$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $L \quad \text{SCHRITT 1A' BEWA'}$

$u - h_{n_0} \in L$

□

DK (3.6)* $\exists (3.5)^+ \forall n \in \mathbb{N} \exists u_n, v_n \in L^+$

$0 \leq v_n \wedge \int v_n \leq \frac{1}{2^n}$ take $z_n, g_n = u_n - v_n$

$\Rightarrow u_n = \underbrace{g_n}_{\substack{u \\ 0}} + \underbrace{v_n}_{\substack{v \\ 0}} \quad \rightarrow u_n \geq 0 : \text{Definiere } U_n^g := \sum_{k=1}^n u_k(x)$

$\Rightarrow u_n \nearrow$ is monotonically polynomial;
 $u_n \in L^+$
 $\int U_n = \int \sum_{k=1}^n u_k$
 $= \sum_{k=1}^n \int u_k = \sum_{k=1}^n \left(\int g_k + \int v_k \right)$
 $\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad \text{SCHRITT 1A) } \quad \quad \quad \text{SCHRITT 1B)}$

atďy $U_m \in L^+$ $U_m \nearrow$ monoton. s.v. $\wedge \sum U_m \in A$ ⑦

Pro $A \in \mathcal{R}$. Použijí Lebesgue větu na $\sum U_m \in L^+$

získáme $U_m \nearrow U \in L^+$ s.v.

$$\wedge \lim \sum_I U_m = \sum_I U$$

$$\Rightarrow \sum_I U = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_I U_m = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_I \mu_k$$

Označme $V_n(x) = \sum_{k=1}^n \mu_k(x)$ klesající monoton. k.V.

g.d. $V_n \in L^+$ atďy $\sum_I V = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_I \mu_k$

$$\Rightarrow U - V \in L \quad \text{a poslovně} \quad U_n - V_n = \sum_{k=1}^n \mu_k - \sum_{k=1}^n \nu_k = \sum_{k=1}^n g_k \Rightarrow U - V \text{ s.v.}$$

Označme $g := U - V \Rightarrow g \in L$ a

$$\int g \stackrel{\text{def}}{=} \int U - V = \sum_k \int_I (\mu_k - \nu_k) = \sum_k \sum_I g_k \quad \square$$

Dle (3.5) budt $f^m \in L$ ~~pro $f \in L$~~ a

①

$$\sum_n f_n < \infty \quad \text{a} \quad f_{m+1}(x) \geq f_m(x) \quad \text{s.v.}$$

Definuj: $S_1 = f_1$ i $S_n := f_n - f_{n-1}$ pro $n > 1$

Ple $S_n \geq 0$ $n \geq 2$ $g_n \in L$

mon' $f_n = \sum_{k=1}^n g_k$ a $\sum_{k=1}^n \int g_k = \int f_n \leq A < \infty$

$\Rightarrow$ MOŽE POUŽIT LEVIHO VĚTU PRO ŘADY

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} g_k$ konverguje s.v. k $g \in L$ a platí'

$$\int g = \sum_{k=1}^{\infty} \int g_k$$

ALE

$\int g$
"

$$\int g = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

$$= \int \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n g_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int g_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int g_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$$

□

ZÁVĚR: VĚTY APLIKACE JSOU BEZE ZMĚN