

Sylabus - Matematika pro fyziky I (NOFY161)

1. Úvod do variačního počtu – nedodělky z letního semestru

- **Krátké opakování:** kritické body a extrémaly; Gâteauxova (směrová) derivace funkcionálu; nutné podmínky existence extrémaly; Euler–Lagrangeova rovnice a její forma ve speciálních případech; Gâteauxův a Fréchetův diferenciál; postačující podmínky existence minima funkcionálu;
- **Vázané extrémy:** vázané extrémy, nutné a postačující podmínky; Lagrangeovy multiplikátory;
- **Variační počet a mechanika kontinua:** Legendreova transformace; Lagrangeovy a Hamiltonovy rovnice.

2. Posloupnosti a řady funkcí

- **Bodová a stejnoměrná konvergence:** kritérium stejnoměrné konvergence; Bolzano–Cauchyho podmínka; stejnoměrná omezenost; záměna limity a integrálu, limity a derivace, zachování spojitosti; prostor spojitých funkcí a úplnost; Diniho věta
- **Řady funkcí:** kritéria stejnoměrné konvergence řad funkcí; záměna limity a řady se sčítáním, odčítáním, derivací a integrací;
- **Kompaktní množiny v prostoru spojitých funkcí:** Arzelà–Ascoliho věta.

3. Lebesgueův integrál

- **Množiny míry nula a prostor jednoduchých funkcí:** definice a vlastnosti; Cantorovo diskontinuum;
- **Lebesgueův integrál:** konstrukce přes prostory M^+ , L^+ , M a L ; základní vlastnosti;
- **Záměna integrálu a limity pro posloupnosti a řady funkcí:** Fatouovo lemma, Leviho a Lebesgueova věta; oscilace, koncentrace a disperze pomocí posloupností;
- **Výpočet Lebesgueova integrálu:** vztah mezi Riemannovým, Newtonovým a Lebesgueovým integrálem; věta Fubiniho; věta o substituci; geometrický význam determinantu;
- **Integrály závislé na parametru:** limita, spojitost a derivace integrálu podle parametru.

4. Křivkový a plošný integrál

- **Křivkový integrál 1. a 2. druhu:** křivky v $\mathbb{R}^d$ (C^1 , regulární, jednoduchá, uzavřená, Jordanova, orientace); motivace a výpočet;
- **Plošný integrál 1. a 2. druhu:** 2-plochy v $\mathbb{R}^3$ (C^1 , regulární, tečný prostor, normála, orientace); motivace a výpočet; Vektorový součin, Gramova matice.
- **Věty zobecňující Newtonův vzorec:** per partes, aneb integrál z derivace f přes oblast se rovná integrálu f přes hranici oblasti; věta o potenciálu; Gauss–Ostrogradského věta, Greenova věta, Stokesova věta. Integrace per partes pro funkce více proměnných.

5. Měřitelné množiny, míry a Lebesgueovy L^p prostory

- **Měřitelné množiny a míry:** topologie a σ -algebra; systémy Lebesgueovsky a Borelovsky měřitelných množin; existence neměřitelné množiny. Míra. Úplná míra: σ -konečná, konečná, pravděpodobnostní míra. Systém Lebesgueovsky měřitelných množin je σ -algebra; každá nezáporná měřitelná funkce generuje míru, která je absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře; pojmy topologický prostor, měřitelný prostor, prostor s mírou, pravděpodobnostní prostor; Diracova míra.
- **L^p prostory:** definice; norma; třídy ekvivalence; Hölderova, Minkowského nerovnost; úplnost L^p prostoru (Rieszova věta); separabilita; různé typy konvergence pro posloupnosti funkcí; Jegorovova věta.

6. Fourierovy řady

- **Abstraktní Fourierovy řady:** separabilní Hilbertův prostor, úplný ortonormální systém; věta o nejlepší aproximaci – definice abstraktní Fourierovy řady; Besselova nerovnost, Parsevalova rovnost, Riesz–Fischerova věta; izomorfismus separabilních Hilbertových prostorů s ℓ_2 ; věta o ortogonální projekci.
- **Klasické Fourierovy řady:** trigonometrický systém, jeho úplnost, bodová a stejnoměrná konvergence klasických Fourierových řad za různých předpokladů na funkci f ; derivace a integrace Fourierových řad.