Statistický seminář

Jelínek, Lehký

Různé sekvenční testy

18. března 2025

Věta 1.7.

Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s týmž rozdělením daným hustotou $f(x, \theta)$ kde $\theta \in \Theta$. Pak pro testy S hypotéz $H_0 : \theta = \theta_0$ proti $H_1 : \theta = \theta_1$, $\theta_0 \neq \theta_1 \in \Theta$, které náleží do $C(\alpha, \beta)$ platí

$$\mathbb{E}_{S(b,a)}(N, \theta_i) = \min_{S \in C(\alpha,\beta)} \mathbb{E}_S(N, \theta_i) \quad i = 0, 1.$$

Sekvenční testy pro složené hypotézy

- Většina metod je analogií metod používaných při nesekvenčním přístupu.

- Většina metod je analogií metod používaných při nesekvenčním přístupu.
  - základem je Waldův test pro jednoduché hypotézy

Sekvenční testy pro složené hypotézy

- Většina metod je analogií metod používaných při nesekvenčním přístupu.
  - základem je Waldův test pro jednoduché hypotézy
- obecně bývá problém dokázat, že test skončí s pravděpodobností 1, a další vlastnosti

Sekvenční testy pro složené hypotézy

- Většina metod je analogií metod používaných při nesekvenčním přístupu.
  - základem je Waldův test pro jednoduché hypotézy
- obecně bývá problém dokázat, že test skončí s pravděpodobností 1, a další vlastnosti
- Testujeme-li jednostrannou hypotézu $H_0 : \theta \leq \theta_0$ proti $H_1 : \theta \geq \theta_1$, $\theta_0 < \theta_1$, obvykle používáme Waldův test pro úlohu $H_0' : \theta = \theta_0$ proti $H_1' : \theta = \theta_1$.

- Mějme $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin z rozdělení $f(x, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbb{R}^k$, kde $\boldsymbol{\theta}$ je neznámý parametr. Uvažujme složené hypotézy $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0,\ H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_1$, kde $\boldsymbol{\Theta}_0$, $\boldsymbol{\Theta}_1 \subset \boldsymbol{\Theta}$ a $\bar{\boldsymbol{\Theta}}_0 \cap \bar{\boldsymbol{\Theta}}_1 = \emptyset$.

Princip váhových funkcí

- Mějme $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin z rozdělení $f(x, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbb{R}^k$, kde $\boldsymbol{\theta}$ je neznámý parametr. Uvažujme složené hypotézy $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0,\ H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_1$, kde $\boldsymbol{\Theta}_0, \boldsymbol{\Theta}_1 \subset \boldsymbol{\Theta}$ a $\bar{\boldsymbol{\Theta}}_0 \cap \bar{\boldsymbol{\Theta}}_1 = \emptyset$.
- Příklad: $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ i.i.d. posloupnost z normálního rozdělení $N(\mu, 1)$. Chceme testovat $H_0 : \mu = \mu_0$ proti $H_1 : \mu \in \{\mu_0 - \delta, \mu_0 + \delta\}$, $\delta \neq 0$.

$$Q_n^* = -\frac{\delta^2}{2} + \ln\left[w_1 \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)\delta\right\} + (1 - w_1)\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)\delta\right\}\right].$$

Volba váhových funkcí

- pevná (dle vlastností konkrétní úlohy)
- minimalizující střední rozsah výběru
- hledáme w_0^* a w_1^* s vlastností

$$\inf_{w_0, w_1} \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_1} P(\text{přij. } H_0 \text{ při } S(b, a, w_0, w_1); \boldsymbol{\theta}) = \\ = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_1} P(\text{přij. } H_0 \text{ při } S(b, a, w_0^*, w_1^*); \boldsymbol{\theta}),$$

$$\inf_{w_0, w_1} \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0} P(\text{přij. } H_1 \text{ při } S(b, a, w_0, w_1); \boldsymbol{\theta}) = \\ = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}_0} P(\text{přij. } H_1 \text{ při } S(b, a, w_0^*, w_1^*); \boldsymbol{\theta}).$$

Test s rušivými parametry

- Mějme X_i s hustotou tvaru $f(x; \boldsymbol{\theta}, \gamma)$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbb{R}^k$, $\gamma \in \boldsymbol{\Gamma} \subset \mathbb{R}^m$, a úlohu

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \quad \text{proti} \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1.$$

- Volbou pravděpodobnostní míry w na borelovských podmnožinách $\boldsymbol{\Gamma}$ můžeme pro test použít testovou statistiku

$$Q_n^* = \ln \frac{\int_{\boldsymbol{\Gamma}} \prod_{i=1}^n f(X_i; \boldsymbol{\theta}_1, \gamma) dw(\gamma)}{\int_{\boldsymbol{\Gamma}} \prod_{i=1}^n f(X_i; \boldsymbol{\theta}_0, \gamma) dw(\gamma)}.$$

Sekvenční test pro porovnání parametrů dvou rozdělení

- Darmois-Koopmanův tvar hustoty,

$$f(x,\theta) = C(\theta)\exp\{D(\theta)T(x)\}h(x),\ x \in E \subset \mathbb{R}, \theta \in (\theta_L, \theta_U).$$

  Kde $D(\theta)$ je rostoucí.

- X_i i.i.d. z rozdělení s hustotou $f(x,\xi)$ a Y_i i.i.d. z rozdělení s hustotou $f(y,\eta)$.
- $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ jsou nezávislé výběry.
- Chceme testovat $H_0 : \xi < \eta$ proti $H_1 : \xi > \eta$.

Porovnání parametrů pro alternativní rozdělení

- X_i a Y_i i.i.d. z alternativního rozdělení s parametrem p_1 respektive p_2.
- Chceme testovat $H_0: \ p_1 < p_2$ proti $H_1: \ p_2 > p_1$.
- Máme hustotu $f(k, p) = p^k(1-p)^{1-k}$ pro $k \in \{0, 1\}$ a 0 jinak.

Porovnání parametrů pro alternativní rozdělení

- $H_0' : \log(\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}) \geq \epsilon$
- $H_1' : \log(\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}) \leq -\epsilon$
- $$Q_N'' = \sum_{i=1}^{N}(X_i - Y_i)$$
- $a^* \geq \epsilon^{-1} \log(\frac{1-\beta}{\alpha})$
- $b^* \leq \epsilon^{-1} \log(\frac{\beta}{1-\alpha})$

Sekvenční znaménkový test

- Mějme $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin ze spojitého rozdělení s distribuční funkcí $F(x-\theta)$, kde $\theta \in \mathbb{R}$ je neznámý parametr.
- Dále přepokládejme, že $F(x)$ je symetrická okolo nuly, tj. $F(x) = 1 - F(-x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- Testujeme $H_0 : \theta \leq 0$, proti $H_1 : \theta \geq \theta_1$, kde $\theta_1 > 0$.
- Testová statistika znaménkového testu:

$$S_n^+ = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}\{X_i \geq 0\}$$

Sobel-Waldův test

- X_i i.i.d. z rozdělení s hustotou $f(x, \xi)$ kde f je hustota Darmois-Koopmanova tvaru.
- Testuji $H_1 : \theta = \theta_1$ proti $H_2 : \theta = \theta_2$ proti $H_3 : \theta = \theta_3$.
- Požaduji

$$P_S(\text{ Přij. } H_j \text{ pokud } \theta = \theta_j) \geq 1 - \gamma_j$$