Teorie míry a integrálu 1

Jan Rataj

zimní semestr 2020/21

Úvod, motivace

Připomenutí:

- Riemannův, Newtonův integrál, geometrický význam plochy pod grafem
- Ne všechny funkce jsou "integrovatelné", ne všechny množiny "měřitelné"
- Obecná konstrukce: nejprve míra (množinová funkce), z ní je odvozen integrál (aproximace po částech konstantními funkcemi).

Příklad (Banach-Tarského paradox)

Jednotková koule v $\mathbb{R}^3$ může být rozdělena na konečně mnoho disjunktních částí, které mohou být složeny (použitím posunů a rotací) do dvou disjunktních jednotkových koulí.

Poznámky:

- části nejsou "měřitelné"
- rozklad existuje jen za předpokladu *axiomu výběru*

Vlastnosti, které chceme po "míře" μ:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) \geq 0 \ \forall A$,

(2) $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ pro po dvou disjunktní množiny $A_1, A_2, \ldots$.

Problém - které množiny jsou "měřitelné", neboli $\mathcal{D}\mu = ?$

Věta

Neexistuje $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ *splňující (1), (2) a*

(3) $\mu(I) = \textit{délka}(I)$ *pro každý interval* I,

(4) $\mu(A + x) = \mu(A)$, $A \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Prostor s mírou

Buď X libovolná neprázdná množina. Symbolem $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$ značíme potenční množinu množiny X.

Definice

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ je *σ-algebra* na X, jestliže

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;

(ii) $A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$;

(iii) $A_i \in \mathcal{A},\ i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ je *algebra*, splňuje-li (1), (2) a

(iii') $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$.

Poznámka

Algebra je uzavřená na konečné množinové operace (průnik, sjednocení, rozdíl), σ-algebra na spočetné množinové operace.

Příklady

- $\{\emptyset, X\}$, $\mathcal{P}(X)$ jsou σ-algebry na X.
- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ je σ-algebra na $X = \{1,2,3\}$.
- $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N} :\ A \text{ konečná nebo } \mathbb{N} \setminus A \text{ konečná}\}$ je algebra na $\mathbb{N}$, ale není to σ-algebra.

Věta

Buďte $\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in I$ σ-algebry na množině X, přitom I je libovolná indexová množina. Pak $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ je σ-algebra na X.

Důsledek

Pro libovolný množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ existuje nejmenší σ-algebra $\sigma\mathcal{S}$ obsahující $\mathcal{S}$.

Borelovské množiny

Definice

Buď (X, ρ) metrický prostor a $\mathcal{G}$ systém všech otevřených podmnožin X. Pak $\mathcal{B}(X) := \sigma\mathcal{G}$ nazýváme *borelovskou σ-algebrou* na X.

Příklady

Následující množinové systémy spadají do borelovské σ-algebry:

- $\mathcal{F}$ - systém uzavřených množin
- $\mathcal{G}_\delta$ - spočetné průniky otevřených množin
- $\mathcal{F}_\sigma$ - spočetná sjednocení uzavřených množin
- $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$ - spočetná sjednocení množin z $\mathcal{G}_\delta$
- $\ldots$

Poznámka

- Je obtížné popsat třídu borelovských množin konstruktivně (je třeba transfinitní indukce).
- Ne všechny množiny jsou borelovské. Platí dokonce

$$\operatorname{card} \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}} = \operatorname{card} \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

tedy neborelovských podmnožin $\mathbb{R}$ je více než borelovských.

Prostor s mírou

Definice

$(X, \mathcal{A})$ je *měřitelný prostor*, jestliže X je neprázdná množina a $\mathcal{A}$ je σ-algebra na X.

μ je *míra* na $(X, \mathcal{A})$, jestliže $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ splňuje

(a) $\mu(\emptyset) = 0$,

(b) $A_i \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní $(i \in \mathbb{N}) \implies \mu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$ (σ-aditivita).

Trojici $(X, \mathcal{A}, \mu)$ nazýváme *prostor s mírou*.

Poznámka

Z vlastnosti (b) a z nezápornosti plyne monotonie míry: $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$.

Příklady

- $\mu(A) = 0 \; \forall A \in \mathcal{P}(X)$ - nulová míra ($\mu = 0$)
- pro $x \in X$ pevný položme

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 0 & x \notin A, \\ 1 & x \in A. \end{cases}.$$

  δ_x se nazývá *Diracova míra* v bodě x.
- Míra

$$\mu(A) = \begin{cases} \operatorname{card}(A) & A \subset X \text{ konečná}, \\ \infty & A \subset X \text{ nekonečná}. \end{cases}$$

  se nazývá *aritmetická míra* na X.

Definice

(i) μ je *borelovská míra* na metrickém prostoru X, je-li to míra na $(X, \mathcal{B}(X))$.

(ii) Míra μ na $(X, \mathcal{A})$ je *konečná*, jestliže $\mu(X) < \infty$.

(iii) Míra μ na $(X, \mathcal{A})$ je σ*-konečná*, jestliže existují $E_n \in \mathcal{A}$ takové, že $X = \bigcup_n E_n$ a $\mu(E_n) < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Spojitost míry

Věta (Spojitost míry)

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *prostor s mírou,* $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$.

1. $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \implies \mu(A_i) \nearrow \mu(\bigcup_i A_i)$,
2. $\mu(A_1) < \infty$, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \implies \mu(A_i) \searrow \mu(\bigcap_i A_i)$.

Nulové množiny

Definice

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Řekneme, že $N \subset X$ je *nulová množina*, jestliže existuje $A \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(A) = 0$ a $N \subset A$. Symbolem $\mathcal{N}$ značíme systém všech nulových množin. dále značíme

$$\mathcal{A}_0 := \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N})$$

zúplněnou σ-algebru $\mathcal{A}$ vzhledem k míře μ.

Poznámka

$\mathcal{N}$ je *σ-ideál*, tedy systém množin uzavřený na podmnožiny a spočetná sjednocení.

Zúplnění míry

Věta (Zúplnění míry)

Je dán prostor s mírou $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Pak platí:

1. $\mathcal{A}_0 = \{B \subset X : \exists A \in \mathcal{A}, B \triangle A \in \mathcal{N}\}$ *(symbolem $\triangle$ značíme symetrickou diferenci množin).*
2. *Míru μ lze jednoznačně rozšířit na prostor $(X, \mathcal{A}_0)$ (značíme opět μ).*
3. *V prostoru $(X, \mathcal{A}_0, \mu)$ jsou všechny nulové množiny měřitelné.*

Lebesgueova míra

Věta (Lebesgueova míra)

Existuje právě jedna borelovská míra λ^n na $\mathbb{R}^n$ taková, že pro všechna $-\infty < a_i < b_i < \infty$, $i = 1, \ldots, n$, platí

$$\lambda^n([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

Poznámky

1. Lebesgueova míra je zřejmě σ-konečná.
2. Značíme $\mathcal{B}_0^n$ zúplnění $\mathcal{B}^n$ vzhledem k λ^n. Platí $\mathcal{B}^n \subsetneq \mathcal{B}_0^n \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.
3. Lebesgueova míra je regulární v tomto smyslu (důkaz bude později): *Ke každé $E \in \mathcal{B}_0^n$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existují G otevřená, F uzavřená, $F \subset E \subset G$, $\lambda^n(G \setminus F) < \varepsilon$.*