Teorie míry a integrálu 1

Jedenáctá přednáška

14.12.2020

Distribuční funkce

Definice

Buď μ konečná borelovská míra na $\mathbb{R}$. Pak

$$F_\mu(x) := \mu((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}$$

je *distribuční funkce* míry μ.

Tvrzení

(1) *F_μ je neklesající,*

(2) $F(-\infty) := \lim_{x \to -\infty} F_\mu(x) = 0$,
$F(\infty) := \lim_{x \to \infty} F_\mu(x) < \infty$,

(3) *F_μ je zprava spojitá.*

(Snadno plyne z monotonie a spojitosti míry.)

Korespondence distribučních funkcí a konečných měr

Věta

Nechť funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *má vlastnosti (1), (2) a (3). Pak existuje právě jedna konečná borelovská míra* μ *na* $\mathbb{R}$ *taková, že* $F_\mu = F$*.*

Příklady distribučních funkcí

- $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1 & x \geq a, \end{cases}$ je distribuční funkce Diracovy míry δ_a.
- Jsou-li $-\infty < a_1 < a_2 < \cdots < a_k < \infty$ a $t_1, \dots, t_k > 0$, pak

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1, \\ t_1 + \cdots + t_i, & x \in [a_i, a_{i+1}),\ i = 1, \dots, k-1, \\ t_1 + \cdots + t_k, & x \geq a_k, \end{cases}$$

  je distribuční funkce míry $\mu = t_1\delta_{a_1} + \cdots + t_k\delta_{a_k}$.
- Je-li $f \in L^1(\lambda)$, $f \geq 0$, pak

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

  je distribuční funkce míry $\mu(B) = \int_B f(t)\,dt$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definice

Konečná borelovská míry μ na $\mathbb{R}$ je

- *diskrétní*, jestliže existuje spočetná množina $S \subset \mathbb{R}$ taková, že $\mu(\mathbb{R} \setminus S) = 0$;
- *neatomická*, jestliže $\mu(\{x\}) = 0$ pro každý $x \in \mathbb{R}$.

Poznámky

1. *Je-li μ zároveň diskrétní a neatomická, je nulová.*
2. *Každá diskrétní míra je tvaru $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} t_i \delta_{a_i}$ pro nějaké $t_i \geq 0$ a $a_i \in \mathbb{R}$, $\sum_i t_i < \infty$.*
3. *μ je neatomická $\iff$ F je spojitá.*

Cantorovo diskontinuum

Položme $C_0 = [0,1]$ a indukcí definujme množiny

$$C_n = \frac{1}{3}C_{n-1} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

(platí $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ a C_n jsou neprázdné kompaktní). Množina

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

se nazývá *Cantorovo diskontinuum*. Platí:

- $\lambda^1(C) = 0$,
- Číslo $x \in [0,1]$ patří do C právě tehdy, když je lze vyjádřit ve trojkovém rozvoji $x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{3^j}$ s pomocí číslic $x_j \in \{0, 2\}$, $j = 1, 2, \ldots$.

Příklad: Cantorova funkce

Buď $C \subset [0,1]$ Cantorovo diskontinuum. *Cantorovu funkci* F_C definujeme následovně. Klademe $F_C(x) = 0$ pro $x \leq 0$ a $F_C(x) = 1$ pro $x \geq 1$. Dále $x \in (0,1)$ vyjádříme v trojkovém rozvoji

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{3^j} \quad (x_j \in \{0,1,2\}),$$

označíme $n(x) := \inf\{j \in \mathbb{N} : x_j = 1\}$ a klademe

$$F_C(x) := \sum_{j=1}^{n(x)} \frac{\min\{x_j, 1\}}{2^j}, \quad x \in (0,1).$$

Funkce F_C je korektně definovaná, spojitá, neklesající a je distribuční funkcí *Cantorovy míry* μ_C, která je neatomická, ale přitom je singulární vzhledem k Lebesgueově míře.

Rozklad míry

Poznámka

Každou konečnou borelovskou míru μ na $\mathbb{R}$ lze rozložit na součet

$$\mu = \mu_a + \mu_c + \mu_d,$$

kde $\mu_a \ll \lambda$, μ_d je diskrétní a μ_c neatomická s vlastností $\mu_c \perp \lambda$.