

Teorie míry a integrálu 1

Dvanáctá přednáška

21.12.2020

Rozklad borelovské míry na \mathbb{R}

Poznámka

Každou konečnou borelovskou míru μ na \mathbb{R} lze rozložit na součet

$$\mu = \mu_a + \mu_c + \mu_d,$$

kde $\mu_a \ll \lambda$, μ_d je diskrétní a μ_c neatomická s vlastností $\mu_c \perp \lambda$.

Derivace distribuční funkce a hustota

Tvrzení

Nechť distribuční funkce F konečné míry μ má všude vlastní derivaci $F' =: f$. Pak $\mu \ll \lambda$ a $f = \frac{d\mu}{d\lambda}$.

Derivace distribuční funkce a hustota

Tvrzení

Nechť distribuční funkce F konečné míry μ má všude vlastní derivaci $F' =: f$. Pak $\mu \ll \lambda$ a $f = \frac{d\mu}{d\lambda}$.

Poznámka

Každá monotónní funkce, a tedy i každá distribuční funkce, má derivaci v λ -skoro všech bodech.

Poznámky

- ▶ Podmínka existence derivace distribuční funkce všude není nutná pro absolutní spojitost (vzhledem k λ). Např.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

je distribuční funkcí absolutně spojitě míry $\mu(\cdot) = \lambda(\cdot \cap (0, 1))$.

- ▶ Nutnou a postačující podmínkou pro absolutní spojitost $\mu \ll \lambda$ je *absolutní spojitost* distribuční funkce F : pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x_1 < y_1 < \dots < x_n < y_n$ platí

$$\sum_{i=1}^n (y_i - x_i) < \delta \implies \sum_{i=1}^n |F(y_i) - F(x_i)| < \varepsilon.$$

Lebesgue-Stieltjesův integrál

Definice

Je-li F distribuční funkce konečné míry μ a $f \in L^1(\mu)$, píšeme

$$\int f(x) dF(x) := \int f(x) d\mu(x).$$

Je-li navíc $a < b$, značíme

$$\int_a^b f(x) dF(x) := \int_{(a,b]} f(x) d\mu(x).$$

Per partes pro Lebesgue-Stieltjesův integrál

Věta

Jsou-li F, G dvě distribuční funkce a $a < b$, platí

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b F(x_-) dG(x) + \int_a^b G(x) dF(x),$$

kde $F(x_-) := \lim_{y \rightarrow x_-} F(y)$.

Příklady

1. Mají-li F i G derivaci na \mathbb{R} , dostaneme z předchozí věty

$$[FG]_a^b = \int_a^b F(x)G'(x) dx + \int_a^b F'(x)G(x) dx,$$

což je klasický vzorec per partes.

2. Pro Cantorovu funkci F_C platí symetrie

$F_C(1-x) = 1 - F_C(x)$, $x \in (0, 1)$, z čehož snadno dostaneme $\int_0^1 F_C(x) dx = \frac{1}{2}$. Použitím vzorce per partes pak dostaneme

$$1 = \int_0^1 x dF_C(x) + \int_0^1 F_C(x) dx,$$

tedy $\int_0^1 x dF_C(x) = \frac{1}{2}$.