8. přednáška, 23.11.2020

Teorie míry a integrálu 1

Osmá přednáška

23.11.2020

8. přednáška, 23.11.2020

Norma L^p

Definice

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a funkce $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelná. Definujeme

$$\begin{aligned} \|f\|_p &:= \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty, \\ \|f\|_\infty &:= \inf\{\alpha \ge 0 : \mu\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = 0\}, \\ \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) &:= \{f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}^*) : \|f\|_p < \infty\}, \quad 1 \le p \le \infty. \end{aligned}$$

(Často budeme psát stručně pouze $\mathcal{L}^p(\mu)$ nebo $\mathcal{L}^p(X)$.)

8. přednáška, 23.11.2020

Norma L^p

Definice

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a funkce $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelná. Definujeme

$$\begin{aligned} \|f\|_p &:= \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|f\|_\infty &:= \inf\{\alpha \geq 0 : \mu\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = 0\}, \\ \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) &:= \{f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}^*) : \|f\|_p < \infty\}, \quad 1 \leq p \leq \infty. \end{aligned}$$

(Často budeme psát stručně pouze $\mathcal{L}^p(\mu)$ nebo $\mathcal{L}^p(X)$.)

Poznámka

Platí $|f| \leq \|f\|_\infty$ μ-skoro všude.

8. přednáška, 23.11.2020

Hölderova nerovnost

Tvrzení

Nechť $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, $1 \le p, q \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Pak* $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *a platí*

$$\|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

8. přednáška, 23.11.2020

Hölderova nerovnost

Tvrzení

Nechť $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Pak* $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *a platí*

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q .$$

Lemma (Youngovo lemma)

Je-li $a, b \geq 0$ *a* $p, q > 1$ *takové, že* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *pak*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

8. přednáška, 23.11.2020

Minkowského nerovnost

Věta

Jsou-li $1 \leq p \leq \infty$ *a* $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, *pak také* $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ *a platí*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

8. přednáška, 23.11.2020

Minkowského nerovnost

Věta

Jsou-li $1 \leq p \leq \infty$ *a* $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, *pak také* $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ *a platí*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Poznámka

$\mathcal{L}^p(\mu)$ *je tedy vektorový prostor a* $\| \cdot \|_p$ *je seminorma (tedy splňuje vlastnosti normy, s tou výjimkou, že z* $\|f\|_p = 0$ *neplyne* $f = 0$*).*

8. přednáška, 23.11.2020

Prostory L^p

Definice

Nechť $1 \leq p \leq \infty$. *Na množině* $\mathcal{L}^p(\mu)$ *definujeme ekvivalenci*

$$f \sim g \iff f = g \ \mu - \textit{skoro všude.}$$

Dále klademe

$$L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)\ |_{\sim}$$

(faktorprostor, formálně množina tříd ekvivalence $\sim$*).*

8. přednáška, 23.11.2020

Prostory L^p

Definice

Nechť $1 \le p \le \infty$. *Na množině* $\mathcal{L}^p(\mu)$ *definujeme ekvivalenci*

$$f \sim g \iff f = g \ \mu - \text{skoro všude.}$$

Dále klademe

$$L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu) \,|_\sim$$

(faktorprostor, formálně množina tříd ekvivalence $\sim$*).*

Tvrzení

Pro $1 \le p \le \infty$ *a* $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ *platí*

$$\|f - g\|_p = 0 \iff f \sim g.$$

8. přednáška, 23.11.2020

Úplnost L^p

Důsledek

$(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ *je normovaný lineární prostor.*

8. přednáška, 23.11.2020

Úplnost L^p

Důsledek

$(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ *je normovaný lineární prostor.*

Věta (MA3)

Prostor $L^p(\mu)$ *je úplný.*

8. přednáška, 23.11.2020

Konvergence posloupností funkcí

$f_n, f : X \to \mathbb{R}$ - typy konvergence:

- $f_n \to f$ (bodová konvergence)
- $f_n \rightrightarrows f$ (stejnoměrná konvergence)

Je-li speciálně $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, máme navíc:

- $f_n \to f$ s.v. (konvergence skoro všude)
- $f_n \xrightarrow{L_p} f \iff \|f_n - f\|_p \to 0$ $(1 \leq p \leq \infty)$ (konvergence v L^p)

8. přednáška, 23.11.2020

Konvergence podle míry

Definice

Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a $f_n, f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ měřitelné funkce, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že *funkce f_n konvergují k funkci f podle míry μ* (píšeme $f_n \xrightarrow{\mu} f$), jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 : \qquad \lim_{n\to\infty} \mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Věta

Pro $1 \leq p \leq \infty$ a $f_n, f \in L^p(\mu)$ platí: $f_n \xrightarrow{L^p} f \implies f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Tvrzení (Čebyševova nerovnost)

Nechť $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mu)$ a $c > 0$. Pak

$$\mu\{x \in X : |f(x)| \geq c\} \leq \frac{\|f\|_p^p}{c^p}.$$

8. přednáška, 23.11.2020

Jegorovova věta

Věta

Nechť $\mu(X) < \infty$, f_n, f *jsou reálné měřitelné funkce na* X, $f_n \to f$ μ*-s.v., a* $\varepsilon > 0$. *Pak existuje* $E \in \mathcal{A}$ *taková, že* $\mu(E) < \varepsilon$ *a* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $X \setminus E$.

Důsledek

Jestliže $\mu(X) < \infty$ *a* f_n, f *jsou reálné měřitelné funkce na* X *takové, že* $f_n \to f$ μ*-s.v., pak* $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Poznámka

Funkce $f_n = \chi_{[n,\infty)}$ *konvergují bodově k nule, ale nikoliv podle míry* λ^1. *Předpoklad konečnosti míry je tedy v Jegorovově větě nutný.*

8. přednáška, 23.11.2020

Tvrzení

Jestliže $f_n \xrightarrow{\mu} f$ na prostoru s konečnou mírou μ, pak existuje vybraná podposloupnost (f_{n_j}) taková, že $f_{n_j} \to f$ μ-s.v.