Přednáška 5.10.2020

1 Úvod

Připomenutí: Riemannův Newtonův integrál, geometrický význam plochy pod grafem

Ne všechny funkce jsou "integrovatelné", ne všechny množiny "měřitelné"

Obecná konstrukce: nejprve míra (množinová funkce), z ní je odvozen integrál (aproximace po částech konstantními funkcemi).

Vlastnosti, které chceme po "míře":

(1) $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) \geq 0 \; \forall A$,

(2) $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ pro po dvou disjunktní množiny $A_1, A_2, \ldots$.

Problém - které množiny jsou "měřitelné", neboli $\mathcal{D}\mu =$?

Příklad: Neexistuje $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ splňující (1), (2) a

(3) $\mu(I) = \text{délka}(I)$ pro každý interval I,

(4) $\mu(A + x) = \mu(A)$, $A \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz: Předpokládejme pro spor, že takové zobrazení μ existuje. Uvažujme ekvivalenci na $\mathbb{R}$

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Množina $A \subset [0, 1]$ nechť obsahuje právě jeden prvek z každé třídy ekvivalence $\sim$ (používáme axiom výběru!). Buď dále $\mathbb{Q} \cap [-1, 1] = \{q_1, q_2, \ldots\}$ očíslování racionálních čísel v intervalu $[-1, 1]$. Nyní platí:

(a) $\bigcup_{i=1}^{\infty}(A + q_i) \supset [0, 1]$ (protože pro každý $x \in [0, 1]$ existuje $a \in A$ takové, že $x - a \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, tedy $x - a = q_i$ pro nějaké i, čili $x \in A + q_i$),

(b) $\bigcup_{i=1}^{\infty}(A + q_i) \subset [-1, 2]$,

(c) množiny $A + q_i$ jsou po dvou disjunktní ($i = 1, 2, \ldots$) (kdyby ne, pak by A obsahovala dva ekvivalentní prvky).

Z (2), (4) a (c) plyne, že $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A + q_i)) = \infty$ jakmile $\mu(A) > 0$, což by bylo v rozporu s (b). Musí tedy být $\mu(A) = 0$. Pak ale i $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A + q_i)) = 0$, což podle (a) a (3) znamená $0 > \mu([0, 1]) = 1$, tedy spor. $\square$

2 Prostor s mírou

Buď X libovolná neprázdná množina. Symbolem $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$ značíme potenční množinu množiny X.

Definice 2.1 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ je *σ-algebra* na X, jestliže

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;

(ii) $A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$;

(iii) $A_i \in \mathcal{A},\, i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ je *algebra*, splňuje-li (1), (2) a

(iii') $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$.

Pozn.: Algebra je uzavřená na konečné množinové operace (průnik, sjednocení, rozdíl), σ-algebra na spočetné množinové operace.

Příklady:

- $\{\emptyset, X\}$, $\mathcal{P}(X)$ jsou σ-algebry na X.
- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ je σ-algebra na $X = \{1,2,3\}$.
- $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N} :\ A$ konečná nebo $\mathbb{N} \setminus A$ konečná$\}$ je algebra na $\mathbb{N}$, ale není to σ-algebra.

Věta 2.1 *Buďte $\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in I$ σ-algebry na množině X, přitom I je libovolná indexová množina. Pak $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ je σ-algebra na X.*

Důkaz: Plyne jednoduše z definice. □

Důsledek 2.2 *Pro libovolný množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ existuje nejmenší σ-algebra $\sigma\mathcal{S}$ obsahující $\mathcal{S}$.*

Důkaz: Položme

$$\sigma\mathcal{S} := \bigcap \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) :\ \mathcal{S} \subset \mathcal{A},\ \mathcal{A} \text{ je } \sigma\text{-algebra}\}.$$

□

Definice 2.2 Buď (X, ρ) metrický prostor a $\mathcal{G}$ systém všech otevřených podmnožin X. Pak $\mathcal{B}(X) := \sigma\mathcal{G}$ nazýváme *borelovskou σ-algebrou* na X.

Příklad: Následující množinové systémy spadají do borelovské σ-algebry:

- $\mathcal{F}$ - systém uzavřených množin
- $\mathcal{G}_\delta$ - spočetné průniky otevřených množin
- $\mathcal{F}_\sigma$ - spočetná sjednocení uzavřených množin
- $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$ - spočetná sjednocení množin z $\mathcal{G}_\delta$
- ...

Pozn.: Je obtížné popsat třídu borelovských množin konstruktivně (je třeba transfinitní indukce).

Pozn.: Ne všechny množiny jsou borelovské. Platí dokonce

$$\operatorname{card} \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}} = \operatorname{card} \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

tedy neborelovských podmnožin $\mathbb{R}$ je více než borelovských.

Definice 2.3 $(X, \mathcal{A})$ je *měřitelný prostor*, jestliže X je neprázdná množina a $\mathcal{A}$ je σ-algebra na X.
μ je *míra* na $(X, \mathcal{A})$, jestliže $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ splňuje

(a) $\mu(\emptyset) = 0$,

(b) $A_i \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní ($i \in \mathbb{N}$) $\implies$ $\mu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$ (σ-aditivita).

Trojici $(X, \mathcal{A}, \mu)$ nazýváme *prostor s mírou.*

Pozn.: Z vlastnosti (b) a z nezápornosti plyne monotonie míry: $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$.

Příklady:

- $\mu(A) = 0 \ \forall A \in \mathcal{P}(X)$ - nulová míra ($\mu = 0$)
- pro $x \in X$ pevný položme

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 0 & x \notin A, \\ 1 & x \in A. \end{cases}.$$

  δ_x se nazývá *Diracova míra* v bodě x.

- Míra

$$\mu(A) = \begin{cases} \operatorname{card}(A) & A \subset X \text{ konečná}, \\ \infty & A \subset X \text{ nekonečná}. \end{cases}$$

  se nazývá *aritmetická míra* na X.

Věta 2.3 (Spojitost míry) *Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$.*

1. $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \implies \mu(A_i) \nearrow \mu(\bigcup_i A_i)$,

2. $\mu(A_1) < \infty$, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \implies \mu(A_i) \searrow \mu(\bigcap_i A_i)$.

Důkaz: 1. Nechť $A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \nearrow A$. Pak $A = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \dots$ je disjunktní rozklad na měřitelné množiny, tedy $\mu(A) = \mu(A_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \mu(A_j \setminus A_{j-1})$. Zároveň $\mu(A_i) = \mu(A_1) + \sum_{i=2}^{j} \mu(A_j \setminus A_{j-1})$, takže $\mu(A_i) \nearrow \mu(A)$, $i \to \infty$.

2. Nechť $A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \searrow A$, $\mu(A_1) < \infty$. Položme $B_i := A_1 \setminus A_i$, $i \in \mathbb{N}$. Zřejmě platí $B_i \nearrow B := A_1 \setminus A$, tedy $\mu(A_1) - \mu(A_i) = \mu(B_i) \nearrow \mu(B) = \mu(A_1) - \mu(A)$, a odečtením výrazu $\mu(A_1) < \infty$ dostaneme $\mu(A_i) \searrow \mu(A)$. □

Definice 2.4 Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Řekneme, že $N \subset X$ je *nulová množina*, jestliže existuje $A \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(A) = 0$ a $N \subset A$. Symbolem $\mathcal{N}$ značíme systém všech nulových množin. dále značíme

$$\mathcal{A}_0 := \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N})$$

zúplněnou σ-algebru $\mathcal{A}$ vzhledem k míře μ.

Pozn: $\mathcal{N}$ je *σ-ideál*, tedy systém množin uzavřený na podmnožiny a spočetná sjednocení.

Věta 2.4 (Zúplnění míry) *Je dán prostor s mírou $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Pak platí:*

1. $\mathcal{A}_0 = \{B \subset X : \exists A \in \mathcal{A}, B \triangle A \in \mathcal{N}\}$ *(symbolem $\triangle$ značíme symetrickou diferenci množin).*
2. *Míru μ lze jednoznačně rozšířit na prostor $(X, \mathcal{A}_0)$ (značíme opět μ).*
3. *V prostoru $(X, \mathcal{A}_0, \mu)$ jsou všechny nulové množiny měřitelné.*

Důkaz: 1. Označme $\overline{\mathcal{A}}_0 := \{B \subset X : \exists A \in \mathcal{A}, B \triangle A \in \mathcal{N}\}$. Ukážeme nejprve, že $\overline{\mathcal{A}}_0$ je σ-algebra. Zřejmě platí $\emptyset, X \in \overline{\mathcal{A}}_0$. Je-li $B \in \overline{\mathcal{A}}_0$, pak $A \triangle B \in \mathcal{N}$ pro nějakou $A \in \mathcal{A}$, a tedy také $X \setminus B \in \overline{\mathcal{A}}_0$, protože $(X \setminus B) \triangle (X \setminus A) = B \triangle A \in \mathcal{N}$ a $X \setminus A \in \mathcal{A}$. Dále, jsou-li $B_i \in \overline{\mathcal{A}}_0$, $i \in \mathbb{N}$, pak $B_i \triangle A_i \in \mathcal{N}$ pro nějaké $A_i \in \mathcal{A}$, a tedy také $\bigcup_i B_i \in \overline{\mathcal{A}}_0$, protože $(\bigcup_i B_i) \triangle (\bigcup_i A_i) \subset \bigcup_i (B_i \triangle A_i) \in \mathcal{N}$. $\overline{\mathcal{A}}_0$ je tedy σ-algebra. Pak ale ze zřejmé inkluze $\mathcal{A} \cup \mathcal{N} \subset \overline{\mathcal{A}}_0$ plyne $\mathcal{A}_0 = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}) \subset \sigma \overline{\mathcal{A}}_0 = \overline{\mathcal{A}}_0$. Opačná inkluze je snadná: je-li $B \in \overline{\mathcal{A}}_0$, pak $B \triangle A \in \mathcal{N}$ pro nějakou $A \in \mathcal{A}$, tedy $B = A \cup (B \setminus A) \setminus (A \setminus B)$, přitom $B \setminus A$ i $A \setminus B$ leží v $\mathcal{N}$, tedy nutně $B \in \mathcal{A}_0$.

2. Je-li $B \in \mathcal{A}_0$ a $A \in \mathcal{A}$ taková, že $B \triangle A \in \mathcal{N}$, položíme $\mu(B) := \mu(A)$. Nejprve musíme ukázat, že toto rozšíření je korektní, tedy že nezávisí na volbě A. Je-li $A' \in \mathcal{A}$ jiná množina s vlastností $B \triangle A' \in \mathcal{N}$, pak z inkluzí $A \setminus A' \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A') \in \mathcal{N}$ a $A' \setminus A \subset (A' \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{N}$ plyne $\mu(A \setminus A') = \mu(A' \setminus A) = 0$, a tedy $\mu(A) = \mu(A')$. Definice je tedy korektní. Ukážeme, že takto dodefinovaná množinová funkce μ je σ-aditivní. Buď (B_i) posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{A}_0$, označme $B := \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, a buďte $A_i \in \mathcal{A}$ takové, že $B_i \triangle A_i \in \mathcal{N}$. Položme $C_1 := A_1$, $C_i := A_i \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{i-1})$, $i = 2, 3 \dots$, $C := \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Pak (C_i) je posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{A}$, tedy $\mu(C) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i)$. Protože množiny $C_i \triangle B_i$ a $C \triangle B$ jsou nulové, platí $\mu(B_i) = \mu(C_i)$, $i \in \mathbb{N}$, a

$\mu(B) = \mu(C)$, a tedy také $\mu(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$. Tím je dokázáno, že μ je σ-aditivní na $\mathcal{A}_0$, a je to tedy míra.

3. Buď $M \subset X$ nulová v $(X, \mathcal{A}_0, \mu)$. Ukážeme, že $M \in \mathcal{N}$ (tedy že M je nulová i v původním prostoru $(X, \mathcal{A}, \mu)$), a tedy $M \in \mathcal{A}_0$. K množině M existuje $B \in \mathcal{A}_0$, $M \subset B$, $\mu(B) = 0$. Z definice rozšířené míry μ dále existuje $A \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(A) = 0$ a $B \setminus A \in \mathcal{N}$, tedy existuje $N \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(N) = 0$ a $B \setminus A \subset N$. Pak ale $M \subset B \subset A \cup N \in \mathcal{A}$ a $\mu(A \cup N) = 0$, tedy $M \in \mathcal{N}$. □

Definice 2.5 (i) μ je *borelovská míra* na metrickém prostoru X, je-li to míra na $(X, \mathcal{B}(X))$.

(ii) Míra μ na $(X, \mathcal{A})$ je *konečná*, jestliže $\mu(X) < \infty$.

(iii) Míra μ na $(X, \mathcal{A})$ je *σ-konečná*, jestliže existují $E_n \in \mathcal{A}$ takové, že $X = \bigcup_n E_n$ a $\mu(E_n) < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Věta 2.5 (Lebesgueova míra) *Existuje právě jedna borelovská míra λ^n na $\mathbb{R}^n$ taková, že pro všechna $-\infty < a_i < b_i < \infty$, $i = 1, \ldots, n$, platí*

$$\lambda^n([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

[Důkaz bude v navazující přednášce.]

Poznámky:

1. Lebesgueova míra je zřejmě σ-konečná.
2. Značíme $\mathcal{B}_0^n$ zúplnění $\mathcal{B}^n$ vzhledem k λ^n. Platí $\mathcal{B}^n \subsetneq \mathcal{B}_0^n \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ (bez důkazu).
3. Lebesgueova míra je regulární v tomto smyslu (důkaz bude později): *Ke každé $E \in \mathcal{B}_0^n$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existují G otevřená, F uzavřená, $F \subset E \subset G$, $\lambda^n(G \setminus F) < \varepsilon$.* (Důkaz bude v navazující přednášce.)