Přednáška 7.12.2020

Důkaz Radon-Nikodymovy věty: Nechť nejprve μ, ν jsou konečné míry na $(X, \mathcal{A})$, $\nu \ll \mu$. Použijeme Tvrzení 12.4 pro míry $\nu \le \mu + \nu$. Existuje tedy měřitelná funkce h, $0 \le h \le 1$, taková, že

$$\nu(A) = \int_A h \, d(\mu + \nu) = \int_A h \, d\mu + \int_A h \, d\nu, \quad A \in \mathcal{A},$$

a tedy

$$\int_A (1 - h) \, d\nu = \int_A h \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Standardním postupem snadno odvodíme, že pro každou nezápornou měřitelnou funkci g platí

$$\int g(1 - h) \, d\nu = \int gh \, d\mu.$$

Specielně dostaneme

$$\nu\{h = 1\} = \int_{\{h=1\}} h \, d(\mu + \nu) = \mu\{h = 1\} + \nu\{h = 1\},$$

tedy $\mu\{h = 1\} = 0$, a protože $\nu \ll \mu$, také $\nu\{h = 1\} = 0$. Platí tedy $h < 1$ $(\mu + \nu)$-s.v.

Volbou $g := \frac{1}{1-h}\chi_A$ ve výše uvedené rovnosti dostaneme

$$\nu(A) = \int \frac{h}{1 - h} \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A},$$

tedy $f = \frac{h}{1-h}$ je hledaná hustota $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Jsou-li μ, ν σ-konečné, existuje rozklad $X = \bigcup_i E_i$ na měřitelné množiny s $\mu(E_i) < \infty$, $\nu(E_i) < \infty$, $i \in \mathbb{N}$. Pro konečné restrikce $\nu|E_i \ll \mu|E_i$ najdeme hustoty f_i na E_i, a výslednou hustotu sestrojíme jako

$$f(x) := f_i(x), \quad x \in E_i, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

$\square$

Pozn.: Hustota $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ je určena jednoznačně modulo ekvivalence $\sim$. (Cvičení)

Definice 12.3 Řekneme, že dvě míry μ, ν na témže měřitelném prostoru $(X, \mathcal{A})$ jsou *vzájemně singulární* (píšeme $\mu \perp \nu$), jestliže existuje množina $S \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(S) = 0$ a $\nu(X \setminus S) = 0$.

Příklady:

1. Je-li $x \neq y$, pak pro Diracovy míry platí $\delta_x \perp \delta_y$.
2. $\lambda^1 \perp \delta_x$ pro každý $x \in \mathbb{R}$.
3. $\lambda^1 \perp \mu$, kde μ je aritmetická míra na množině celých čísel.

Věta 12.5 (Rozklad míry na absolutně spojitou a singulární část) *Buďte μ, ν dvě σ-konečné míry na témže měřitelném prostoru. Pak existuje rozklad $\nu = \nu_a + \nu_s$ na míry ν_a, ν_s takový, že $\nu_a \ll \mu$ a $\nu_s \perp \mu$. Míry ν_a a ν_s jsou jednoznačně určeny.*

Pozn.: Míra ν_a se nazývá *absolutně spojitá část* a míra ν_s *singulární část* míry ν vzhledem k μ.

Důkaz: Buď $f_\mu := \frac{d\mu}{d(\mu+\nu)}$ Radon-Nikodýmova hustota. Označme $A := \{f_\mu > 0\}$ a $B := \{f_\mu = 0\}$; zřejmě $X = A \cup B$ je rozklad. Dále položme

$$\nu_a(\cdot) := \nu(\cdot \cap A), \qquad \nu_s(\cdot) := \nu(\cdot \cap B).$$

Zřejmě $\nu = \nu_a + \nu_s$. Dále platí $\nu_s(A) = 0$ a $\mu(B) = 0$, tedy $\nu_s \perp \mu$. A pokud $\mu(E) = 0$ pro nějakou měřitelnou množinu E, pak

$$0 = \mu(E) = \int_E f_\mu \, d(\mu + \nu),$$

tedy $f_\mu = 0$ ν-s.v. na E, což znamená, $\nu(E \cap A) = 0$ (podle definice A), tedy $\nu_a(E) = 0$. Je tedy $\nu_a \ll \mu$.

Ukážeme ještě jednoznačnost rozkladu. Nechť $\nu = \nu'_a + \nu'_s$ je jiný rozklad takový, že $\nu'_a \ll \mu$ a $\nu'_s \perp \mu$. Ukážeme, že

$$\nu'_s(A) = 0 = \nu'_a(B). \tag{2}$$

Z toho pak plyne pro každou $E \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \nu'_s(E) &= \nu'_s(E \cap B) = \nu'_s(E \cap B) + \nu'_a(E \cap B) = \nu(E \cap B) = \nu_s(E), \\ \nu'_a(E) &= \nu'_a(E \cap A) = \nu'_a(E \cap A) + \nu'_s(E \cap A) = \nu(E \cap A) = \nu_a(E). \end{aligned}$$

Stačí tedy ověřit (2). Protože $\nu'_s \perp \mu$, existuje měřitelná množina S taková, že $\mu(S) = 0$ a $\nu'_s(X \setminus S) = 0$. Pak

$$0 = \mu(S \cap A) = \int_{S \cap A} f_\mu \, d(\mu + \nu).$$

Protože $f_\mu > 0$ na A, musí být $(\mu + \nu)(S \cap A) = 0$, tedy i $\nu(S \cap A) = 0$ a $\nu'_s(S \cap A) = 0$, tudíž $\nu'_s(A) = \nu'_s(A \cap S) + \nu'_s(A \setminus S) = 0$. Dále (z definice B) platí $\mu(B) = 0$ a $\nu'_a \ll \mu$, tedy i $\nu'_a(B) = 0$. Tím je (2) ověřeno a důkaz ukončen. $\square$

13 Věta o rozšíření míry

Definice 13.1 Nechť $X \neq \emptyset$ a $\mathcal{A}$ je algebra podmnožin X. Řekneme, že funkce $\tilde{\mu} : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ je *pramíra*, jestliže

(i) $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$,

(ii) pro libovolné množiny $A_i \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní a takové, že i $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, platí

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i).$$

Pozn.: $\tilde{\mu}$ je zřejmě monotónní.

Příklad: Množinová funkce

$$\tilde{\mu}(A) := \begin{cases} 0, & A \subset \mathbb{N} \text{ konečná}, \\ \infty, & A \subset \mathbb{N} \text{ nekonečná} \end{cases}$$

je konečně aditivní množinová funkce na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, která není σ-aditivní.

Věta 13.1 (Hahn-Kolmogorovova věta o rozšíření míry) *Buď $\tilde{\mu}$ pramíra na algebře $\mathcal{A}$ podmnožin množiny X. Pak existuje míra μ na $\sigma\mathcal{A}$ taková, že $\tilde{\mu} = \mu$ na $\mathcal{A}$. Je-li $\tilde{\mu}$ σ-konečná, je μ jednoznačně určena.*

[Bez důkazu (bude v navazující přednášce)]

Tvrzení 13.2 *Buď $\tilde{\mu} : \mathcal{A} \to [0, \infty)$* konečná, *konečně aditivní funkce na algebře $\mathcal{A}$ splňující $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$. Pak $\tilde{\mu}$ je σ-aditivní právě tehdy, když*

$$A_i \in \mathcal{A},\ A_i \searrow \emptyset \implies \tilde{\mu}(A_i) \to 0. \tag{3}$$

Pozn: Vlastnosti (3) se říká spojitost $\tilde{\mu}$ v prázdné množině.

Důkaz: $\Longrightarrow$: Nechť $\tilde{\mu}$ je σ-aditivní a $A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \searrow \emptyset$. Pak $A_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \setminus A_{i+1})$ a množiny $A_i \setminus A_{i+1}$ jsou po dvou disjunktní, tedy

$$\tilde{\mu}(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i \setminus A_{i+1}) < \infty.$$

Rovněž platí $A_n = \bigcup_{i=n}^{\infty}(A_i \setminus A_{i+1})$, tedy

$$\tilde{\mu}(A_n) = \sum_{i=n}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i \setminus A_{i+1}) \to 0, \quad n \to \infty.$$

$\Longleftarrow$: Nechť nyní platí (3), $B_i \in \mathcal{A}$ jsou po dvou disjunktní a $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}$. Pro množiny $A_n := A \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_n)$ platí $A_n \searrow \emptyset$, tedy $\tilde{\mu}(A_n) \to 0$. Z konečné aditivity $\tilde{\mu}$ máme

$$\tilde{\mu}(A) - \tilde{\mu}(A_n) = \tilde{\mu}(A \setminus A_n) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mu}(B_i),$$

a limitním přechodem $n \to \infty$ dostaneme $\tilde{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(B_i)$. □

Příklady:

1. Označme symbolem $\mathcal{A}_0$ systém podmnožin $\mathbb{R}$ obsahující prázdnou množinu a všechna konečná sjednocení intervalů typu $(a, b]$ a (a, ∞), $a \in [-\infty, \infty)$, $b \in \mathbb{R}$. Lze snadno nahlédnout, že $\mathcal{A}_0$ je algebra, a definujme množinovou funkci $\tilde{\lambda}$ na $\mathcal{A}_0$ jako součet délek příslušných (disjunktních) intervalů. Lze ukázat, že $\tilde{\lambda}$ je σ-aditivní množinová funkce, tedy pramíra, a jejím rozšířením na $\sigma\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ je Lebesgueova míra λ^1.

2. Na algebře $\mathcal{A}_0$ z předchozího příkladu uvažujme množinovou funkci

$$\tilde{\mu}(A) := \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ \infty, & A \neq \emptyset. \end{cases}$$

   $\tilde{\mu}$ je zřejmě pramíra, nemá ale jednoznačné rozšíření na $\sigma\mathcal{A}_0$. Jedním možným rozšířením je míra definovaná stejným předpisem jako $\tilde{\mu}$ (tedy 0 pro prázdnou množinu a ∞ pro všechny neprázdné množiny), jiným rozšířením je aritmetická míra, nebo její libovolný kladný násobek.

Příklad. Položme $X := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (posloupnosti $0 - 1$) a pro $n \in \mathbb{N}$ označme $\Pi_n : X \to \{0, 1\}^n$ projekci do prvních n souřadnic. Dále označme

$$\mathcal{A} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n^{-1}(\mathcal{P}\{0, 1\}^n).$$

Systém $\mathcal{A}$ tvoří algebru a definujeme na ní množinovou funkci předpisem: Je-li $A \in \mathcal{A}$, pak $A = \Pi_n^{-1}(B)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a $B \subset \{0, 1\}^n$; klademe

$$\tilde{\mu}(A) := \frac{\operatorname{card} B}{2^n}.$$

$\tilde{\mu}$ je korektně definovaná konečně aditivní množinová funkce.

Na množině X zavedeme metriku

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}, \quad x, y \in X.$$

Potřebujeme tyto znalosti z matematické analýzy:

1. Konvergence posloupnosti v (X, d) je ekvivalentní konvergenci posloupností všech souřadnic.

2. (X, d) je kompaktní metrický prostor.

3. Každá množina $A \in \mathcal{A}$ je otevřená i uzavřená v (X, d).

Jsou-li $A_n \in \mathcal{A}$ takové, že $A_n \searrow \emptyset$, pak z kompaktnosti A_n plyne, že existuje n_0 takové, že $A_n = \emptyset$ pro $n > n_0$. Pak ale jistě $\tilde{\mu}(A_n) \to 0$, je tedy splněna podmínka (3) a tudíž $\tilde{\mu}$ je pramíra. Podle Hahn-Kolmogorovovy věty tedy existuje její jednoznačné rozšíření na míru μ na $\mathcal{B} := \sigma\mathcal{A}$. Míra μ je pravděpodobnostní míra a má význam rozložení pravděpodobnosti pro posloupnost nezávislých opakování pokusu hodu mincí.