Přednáška 2.11.2020

7 Věta o jednoznačnosti míry

Definice 7.1 Řekneme, že $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ je *Dynkinův systém*, jestliže

(i) $X \in \mathcal{D}$,

(ii) $D \in \mathcal{D} \implies X \setminus D \in \mathcal{D}$,

(iii) $D_n \in \mathcal{D}$, D_n po dvou disjunktní $\implies \bigcup_n D_n \in \mathcal{D}$.

Pozn.:

1. Dynkinův systém je uzavřen i na vlastní množinové rozdíly: Jsou-li $A, B \in \mathcal{D}$, $A \subset B$, pak i $B \setminus A \in \mathcal{D}$.
2. Každá σ-algebra je zřejmě Dynkinův systém, ale ne naopak.

Tvrzení 7.1 (a) *Průnik libovolného systému Dynkinových systémů je opět Dynkinův systém.*

(b) *Pro každý množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ existuje nejmenší Dynkinův systém, obsahující $\mathcal{S}$:*

$$\delta\mathcal{S} := \bigcap\{\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X) \text{ Dynkinův syst.}, \mathcal{S} \subset \mathcal{D}\}.$$

Věta 7.2 *Nechť je množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ uzavřen na konečné průniky. Pak $\delta\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$.*

Důkaz: Ukážeme, že $\delta\mathcal{S}$ je uzavřen na konečné průniky. Z toho již vyplyne, že $\delta\mathcal{S}$ je σ-algebra, a tedy $\delta\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$. (Skutečně, není těžké ověřit, že každý Dynkinův systém, který je uzavřený na konečné průniky, již je σ-algebrou.)

Položme

$$\mathcal{D} := \{D \in \delta\mathcal{S} : D \cap S \in \delta\mathcal{S} \text{ pro každou } S \in \mathcal{S}\}.$$

Z předpokladu věty víme, že $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$. Ukážeme, že $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém. (i) Zřejmě $X \in \mathcal{D}$. (ii) Je-li $D \in \mathcal{D}$ a $S \in \mathcal{S}$, pak

$$(X \setminus D) \cap S = S \setminus (S \cap D) \in \delta\mathcal{S},$$

tedy $X \setminus D \in \mathcal{D}$. (iii) Jsou-li $D_n \in \mathcal{D}$ po dvou disjunktní a $S \in \mathcal{S}$, pak

$$(\bigcup_n D_n) \cap S = \bigcup_n (D_n \cap S) \in \delta\mathcal{S},$$

tedy $\bigcup_n D_n \in \mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ je tedy Dynkinův systém a musí se tudíž shodovat se $\delta\mathcal{S}$.

Dále položme

$$\mathcal{E} := \{E \in \delta\mathcal{S} : \ E \cap D \in \delta\mathcal{S} \text{ pro každou } D \in \delta\mathcal{S}\}.$$

Z dokázané rovnosti $\mathcal{D} = \delta\mathcal{S}$ plyne $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$. $\mathcal{E}$ je rovněž Dynkinův systém (to se dokáže stejně, jako pro systém $\mathcal{D}$). Platí tedy také $\mathcal{E} = \delta\mathcal{S}$, což znamená, že $\delta\mathcal{S}$ je uzavřen na konečné průniky, a důkaz je hotov. □

Věta 7.3 (Věta o jednoznačnosti míry) *Nechť je množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ uzavřen na konečné průniky a μ, ν nechť jsou dvě míry na $\sigma\mathcal{S}$ takové, že $\mu(S) = \nu(S)$ pro každou $S \in \mathcal{S}$. Nechť dále existují množiny $A_n \in \mathcal{S}$ ($n \in \mathbb{N}$) takové, že $A_n \nearrow X$ a $\mu(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\mu = \nu$ na $\sigma\mathcal{S}$.*

Důkaz: (1) Předpokládejme, nejprve, že μ je konečná. Množina

$$\mathcal{D} := \{A \in \sigma\mathcal{S} : \ \mu(A) = \nu(A)\}$$

je Dynkinův systém (vlastnost (i) plyne z $\mu(X) = \lim_n \mu(A_n) = \lim_n \nu(A_n) = \nu(X)$, vlastnosti (ii) a (iii) pak ze (spočetné) aditivity míry). Protože $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ podle předpokladu, musí být $\mathcal{D} = \delta\mathcal{S}$. Podle Věty 7.2 je ovšem $\delta\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$, a tedy μ a ν se shodují na $\sigma\mathcal{S}$.

(2) Je-li μ nekonečná, položíme

$$\mathcal{D}_n := \{A \in \sigma\mathcal{S} : \ \mu(A \cap A_n) = \nu(A \cap A_n)\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Stejně jako v části (1) se ověří, že $\mathcal{D}_n$ je Dynkinův systém obsahující $\mathcal{S}$, a tedy $\mathcal{D}_n = \sigma\mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$. Ze spojitosti míry pak pro libovolnou $A \in \sigma\mathcal{S}$ dostaneme

$$\mu(A) = \lim_n \mu(A \cap A_n) = \lim_n \nu(A \cap A_n) = \nu(A),$$

čímž je důkaz ukončen. □

Příklad: Je-li μ míra na $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$ taková, že $\mu(I) = \text{délka}(I)$ pro každý omezený interval I, pak nutně $\mu = \lambda^1$.

8 Součin měr a Fubiniova věta

Mějme dva prostory $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ se σ-konečnými měrami.

Definice 8.1 *Měřitelným obdélníkem* rozumíme množinu $A \times B \subset X \times Y$, kde $A \in \mathcal{A}$ a $B \in \mathcal{B}$. σ-algebru

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \sigma\{A \times B : \ A \in \mathcal{A}, \ B \in \mathcal{B}\}$$

nazýváme *součinovou σ-algebrou* na prostoru $X \times Y$.

Pro množinu $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ značíme

$$\begin{aligned} E_x &:= \{y \in Y : (x,y) \in E\}, \quad x \in X, \\ E^y &:= \{x \in X : (x,y) \in E\}, \quad y \in Y \end{aligned}$$

řezy množiny E.

Tvrzení 8.1 *Nechť $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Pak*

1. *$E_x \in \mathcal{B}$ pro všechna $x \in X$,*
2. *funkce $x \mapsto \nu(E_x)$ je měřitelná na $(X, \mathcal{A})$.*

Důkaz: 1. Pro libovolné $x \in X$ je $\{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : E_x \in \mathcal{B}\}$ zřejmě σ-algebra obsahující všechny měřitelné obdélníky, tedy musí splývat se součinovou σ-algebrou.

2. Zvolme pevně libovolnou množinu $B_0 \in \mathcal{B}$ s mírou $\nu(B_0) < \infty$. Označme

$$\mathcal{D} := \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : x \mapsto \nu(E_x \cap B_0) \text{ je měřitelná}\}.$$

Zřejmě $\mathcal{D}$ obsahuje všechny měřitelné obdélníky, a snadno se ověří, že $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém. $\mathcal{D}$ tedy obsahuje δ-obal všech měřitelných obdélníků, a protože měřitelné obdélníky jsou uzavřené na konečné průniky, jejich δ-obal je totožný se σ-obalem, a tedy $\mathcal{D} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Protože ν je σ-konečná, existují množiny $B_n \in \mathcal{B}$, $\nu(B_n) < \infty$, $B_n \nearrow Y$, $n \to \infty$. Pak pro libovolnou $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ platí $\nu(E_x) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_x \cap B_n)$, a tedy funkce $x \mapsto \nu(E_x)$ je měřitelná (jako limita měřitelných funkcí). $\square$

Věta 8.2 (Existence a jednoznačnost součinové míry) *Existuje právě jedna míra $\mu \otimes \nu$ na $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ s vlastností*

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B), \quad A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B}$$

(klademe $0 \cdot \infty = 0$).

Důkaz: Pro $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ položme

$$(\mu \otimes \nu)(E) := \int \nu(E_x)\, d\mu(x). \tag{1}$$

Nejprve ukážeme, že $\mu \otimes \nu$ je míra na $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$. Zřejmě $(\mu \otimes \nu)(\emptyset) = 0$. Jsou-li $E_n \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ po dvou disjunktní, platí

$$\begin{aligned} (\mu \otimes \nu)(\bigcup_n E_n) &= \int \nu((\bigcup_n E_n)_x)\, d\mu(x) = \int \nu(\bigcup_n (E_n)_x)\, d\mu(x) \\ &= \int \sum_n \nu((E_n)_x)\, d\mu(x) = \sum_n (\mu \otimes \nu)(E_n) \end{aligned}$$

(využili jsme faktu, že řezy disjunktních množin jsou opět disjunktní). Tedy $\mu \otimes \nu$ je míra.

Z definice je zřejmé, že pro měřitelný obdélník $A \times B$ je $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

Zbývá ukázat jednoznačnost. Použijeme Větu 7.3. Systém všech měřitelných obdélníků je uzavřen na konečné průniky a součinová míra je na měřitelných obdélnících jednoznačně určena. Protože μ a ν jsou σ-konečné míry, existují množiny $A_n \in \mathcal{A}$, $\mu(A_n) < \infty$, $A_n \nearrow X$, a $B_n \in \mathcal{B}$, $\nu(B_n) < \infty$, $B_n \nearrow Y$, $n \to \infty$. Měřitelné obdélníky $C_n := A_n \times B_n$ pak splňují $(\mu \otimes \nu)(C_n) < \infty$ a $C_n \nearrow X \times Y$, předpoklady Věty 7.3 jsou tedy splněny. $\square$