Přednáška 16.11.2020

9 Věta o substituci

Připomenutí: Pro funkci $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ a diferencovatelnou surjektivní monotónní funkci $\varphi : (a, b) \to (\alpha, \beta)$ platí

$$\int_a^b f(\varphi(x))|\varphi'(x)|\, dx = \int_\alpha^\beta f(y)\, dy,$$

má-li jedna strana smysl jako Newtonův integrál.

Pozn.: Lebesgueova míra λ^n je translačně invariantní (tedy $\lambda^n(B+z) = \lambda^n(B)$ kdykoliv $B \in \mathcal{B}^n$ a $z \in \mathbb{R}^n$). To plyne z věty o jednoznačnosti míry, neboť λ^n a míra $\mu(B) := \lambda^n(B + z)$, $B \in \mathcal{B}^n$, se shodují na otevřených kvádrech.

Tvrzení 9.1 *Buď $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ regulární lineární zobrazení a $A \in \mathcal{B}^n$. Pak $L(A) \in \mathcal{B}^n$ a platí $\lambda^n(L(A)) = |\det L|\lambda^n(A)$.*

Důkaz: Každé lineární zobrazení mezi konečněrozměrnými prostory je spojité. Protože L je regulární, existuje (spojité) inverzní zobrazení L^{-1}, a tedy $L(A) = (L^{-1})^{-1}(A) \in \mathcal{B}^n$.

Podle známé věty z lineární algebry lze každé regulární lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vyjádřit jako složení konečně mnoha "elementárních" lineárních zobrazení jednoho ze tří typů:

(i) $L_1 : (x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$ (tedy L_1 prohazuje i-tou a j-tou souřadnici vektoru);

(ii) $L_2 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + bx_1)$ ($b \in \mathbb{R}$) (L_2 přičte k n-té souřadnici b-násobek první souřadnice);

(iii) $L_3 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, ax_n)$ ($a \neq 0$) (L_3 vynásobí n-tou souřadnici nenulovým faktorem a).

Protože složené lineární zobrazení odpovídá součinu příslušných matic, a determinant součinu je součinem determinantu jednotlivých matic, stačí dokazovanou udentitu ukázat pro případy $L = L_1, L_2$ a L_3.

Míry $\lambda^n L_1$ a λ^n se shodují na systému otevřených kvádrů. Podle věty o jednoznačnosti míry se tedy shodují i na Borelovské σ-algebře, a máme tedy $\lambda^n(L_1(A)) = \lambda^n(A) = |\det L_1|\lambda^n(A)$, $A \in \mathcal{B}^n$.

Podle Fubiniovy věty platí

$$\lambda^n(L_2(A)) = \int_{\Pi_{n-1}(A)} \lambda^1 \left((L_2(A))_{(x_1,\dots,x_{n-1})}\right) d(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

kde $\Pi_{n-1} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1})$. Pro řez množiny $L_2(A)$ pak z tvaru L_2 dostáváme

$$(L_2(A))_{(x_1,\dots,x_{n-1})} = A_{(x_1,\dots,x_{n-1})} + bx_1,$$

a protože λ^1 je translačně invariantní a $\Pi_{n-1}(L_2(A)) = \Pi_{n-1}(A)$, máme

$$\lambda^n(L_2(A)) = \int_{\Pi_{n-1}(A)} \lambda^1\left(A_{(x_1,\dots,x_{n-1})}\right) d(x_1,\dots,x_{n-1}) = \lambda^n(A).$$

Jelikož $|\det L_2| = 1$, ověřili jsme tím rovnost pro L_2.

Míry λ^n a $\mu(A) := |a|^{-1}\lambda^n(L_3(A))$ se shodují na systému otevřených kvádrů, proto se shodují podle věty o jednoznačnosti i na borelovských množinách. Platí tedy $\lambda^n(L_3(A)) = |a|\lambda^n(A) = |\det L_3|\lambda^n(A)$. Tím je důkaz ukončen. □

Důsledek 9.2 (Lebesgueova míra je izometricky invariantní) *Je-li $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izometrie (tzn. $\|S(x)-S(y)\| = \|x-y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$), pak $\lambda^n(S(A)) = \lambda^n(A)$, $A \in \mathcal{B}^n$.*

Důkaz: Podle věty z lineární algebry lze každou izometrii v $\mathbb{R}^n$ zapsat ve tvaru

$$S : x \mapsto b + R(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

kde $b \in \mathbb{R}^n$ ("posunutí") a R je ortogonální lineární zobrazení (tzn. $R^T R = I$). Protože $|\det R| = 1$ a λ^n je translačně invariantní, dostáváme $\lambda^n(S(A)) = \lambda^n(A)$ z Tvrzení 9.1. □

Důsledek 9.3 *Je-li $W \subset \mathbb{R}^n$ afinní podprostor dimenze menší než n, platí $\lambda^n(W) = 0$.*

Důkaz: Plyne z faktu, že vhodné izometrické zobrazení zobrazí W na lineární podprostor generovaný prvními $k < n$ vektory kanonické báze $\mathbb{R}^n$. □

Důsledek 9.4 *Tvrzení 9.1 platí i bez předpokladu regularity zobrazení L.*

Důkaz: Je-li L singulární, je $L(\mathbb{R}^n)$ podprostor dimenze menší než n, a zároveň $\det L = 0$. □

Důsledek 9.5 (Homogenita Lebesgueovy míry)

$$\lambda^n(rA) = |r|^n \lambda^n(A), \quad r \in \mathbb{R},\ A \in \mathcal{B}^n.$$

Definice 9.1 Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f : U \to \mathbb{R}^n$ zobrazení třídy C^1. Pak $\mathcal{J}f(x) := \det Df(x)$ je *Jakobián funkce f v bodě x*, $x \in U$.

Definice 9.2 Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Zobrazení $f : U \to \mathbb{R}^n$ je *difeomorfismus*, je-li prosté, třídy C^1 a platí-li $\mathcal{J}f(x) \neq 0$, $x \in U$.

Pozn.: Z věty o inverzním zobrazení plyne, že je-li $f : U \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismus, je obraz $f(U)$ otevřená množina a f^{-1} je třídy C^1 na $f(U)$.

Věta 9.6 (Věta o substituci) *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismus a $f : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ Lebesgueovsky měřitelná funkce. Pak*

$$\int_U f(\varphi(x))\, |\mathcal{J}\varphi(x)|\, dx = \int_{\varphi(U)} f(y)\, dy,$$

má-li jedna strana smysl.

[BEZ DŮKAZU]

Důsledek 9.7 *Je-li navíc $B \subset \varphi(U)$ Lebesgueovsky měřitelná množina, platí*

$$\int_{\varphi^{-1}(B)} f(\varphi(x))\, |\mathcal{J}\varphi(x)|\, dx = \int_B f(y)\, dy,$$

má-li jedna strana smysl.

Příklad: Zobrazení $\varphi : (r,t) \mapsto (r\cos t, r\sin t)$ je difeomorfismus na $U = (0,\infty) \times (-\pi,\pi)$, $\mathcal{J}\varphi(r,t) = r$ a platí $\lambda^2(\mathbb{R}^2 \setminus \varphi(U)) = 0$, proto

$$\lambda^2(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} r\, d(r,t), \quad B \in \mathcal{B}_0^2.$$