Přednáška 23.11.2020

10 Prostory L^p

Definice 10.1 Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a funkce $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelná. Definujeme

$$\begin{aligned} \|f\|_p &:= \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty, \\ \|f\|_\infty &:= \inf\{\alpha \ge 0 : \mu\{x \in X : |f(x) > \alpha\} = 0\}, \\ \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) &:= \{f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^*, \mathcal{B}^*) : \|f\|_p < \infty\}, \quad 1 \le p \le \infty. \end{aligned}$$

(Často budeme psát stručně pouze $\mathcal{L}^p(\mu)$ nebo $\mathcal{L}^p(X)$.)

Pozn.: Platí $|f| \le \|f\|_\infty$ μ-skoro všude.

Tvrzení 10.1 (Hölderova nerovnost) *Nechť $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$, $1 \le p, q \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pak $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a platí*

$$\|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Důkaz: Uvažujme nejprve případ $p = 1$, $q = \infty$. Pak

$$\|fg\|_1 = \int |f(x)g(x)| \, d\mu(x) \le \|g\|_\infty \int |f(x)| \, d\mu(x) = \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

Dále předpokládejme, že $1 < p, g < \infty$. K důkazu nerovnosti použijeme pomocné lemma:

Lemma 10.2 (Youngovo lemma) *Je-li $a, b \ge 0$ a $p, q > 1$ takové, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, pak*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Důkaz: Nechť $ab > 0$ jinak je nerovnost zřejmá). Protože logaritmus je konkávní funkce, platí

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \ge \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q = \log a + \log b = \log(ab).$$

Z toho již plyne dokazovaná rovnost, neboť logaritmus je rostoucí funkce. $\square$

Dokončení důkazu Hölderovy nerovnosti: Je-li $\|f\|_p = 0$ nebo $\|g\|_q = 0$, musí být $f \cdot g = 0$ s.v. a nerovnost zřejmě platí. Nechť dále $\|f\|_p > 0$ a $\|g\|_q > 0$. Podle Youngovy nerovnosti platí

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}, \quad x \in X,$$

a zintegrováním dostaneme

$$\frac{\int |f \cdot g| \, d\mu}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{\|f\|_p^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{\|g\|_q^q}{q\|g\|_q^q} = 1,$$

což je Hölderova nerovnost. □

Věta 10.3 (Minkowského nerovnost) *Jsou-li* $1 \leq p \leq \infty$ *a* $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, *pak také* $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ *a platí*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Důkaz: Je-li $p = 1$, nerovnost snadno plyne z trojúhelníkové nerovnosti $|f + g| \leq |f| + |g|$ zintegrováním. Je-li $p = \infty$, platí podle definice $|f| \leq \|f\|_\infty$ s.v. a $|g| \leq \|g\|_\infty$ s.v., tedy

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ s.v.},$$

z čehož plyne $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Nechť nyní $1 < p < \infty$. Funkce $x \mapsto x^p$ je konvexní na $(0, \infty)$, tudíž

$$\left|\frac{f + g}{2}\right|^p \leq \left(\frac{|f| + |g|}{2}\right)^p \leq \frac{|f|^p + |g|^p}{2},$$

z čehož zintegrováním dostaneme

$$\|f + g\|_p^p \leq 2^{p-1}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p) < \infty.$$

Tedy $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Položme $q := \frac{p}{p-1}$ (platí tedy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Funkce $|f + g|^{p-1}$ leží v $\mathcal{L}^q(\mu)$ a podle Hölderovy nerovnosti platí

$$\int (|f| \cdot |f + g|^{p-1}) \, d\mu \leq \|f\|_p \||f + g|^{p-1}\|_q,$$

$$\int (|g| \cdot |f + g|^{p-1}) \, d\mu \leq \|g\|_p \||f + g|^{p-1}\|_q.$$

Sečtením obou nerovností a s využitím identity

$$\||f + g|^{p-1}\|_q = \|f + g\|_p^{p-1}$$

dostaneme

$$\int |f + g|^p \, d\mu \leq \int (|f| + |g|)|f + g|^{p-1} \, d\mu \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f + g\|_p^{p-1},$$

což je Minkowského nerovnost. □

Pozn.: $\mathcal{L}^p(\mu)$ je tedy vektorový prostor a $\|\cdot\|_p$ je *seminorma* (tedy splňuje vlastnosti normy, s tou výjimkou, že z $\|f\|_p = 0$ neplyne $f = 0$).

Definice 10.2 Nechť $1 \le p \le \infty$. Na množině $\mathcal{L}^p(\mu)$ definujeme ekvivalenci

$$f \sim g \iff f = g \ \mu - \text{skoro všude}.$$

Dále klademe

$$L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu) \mid_\sim$$

(faktorprostor, formálně množina tříd ekvivalence $\sim$).

Tvrzení 10.4 *Pro* $1 \le p \le \infty$ *a* $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ *platí*

$$\|f - g\|_p = 0 \iff f \sim g.$$

Důkaz: Plyne z Věty 6.1.

Důsledek: $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ je normovaný lineární prostor.

Věta 10.5 *Prostor* $L^p(\mu)$ *je úplný.*

[Důkaz: přednáška MA3]

11 Konvergence posloupností funkcí

Rekapitulace: Pro reálné funkce f_n, f definované na neprázdné množině X máme konvergenci *bodovou* ($f_n \to f$) a *stejnoměrnou* ($f_n \rightrightarrows f$). Je-li speciálně $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, máme navíc konergenci *skoro všude* ($f_n \to f$ s.v.) a L^p*-konvergenci* ($f_n \overset{L_p}{\to} f \iff \|f_n - f\|_p \to 0$), $1 \le p \le \infty$.

Definice 11.1 Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a $f_n, f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ měřitelné funkce, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že *funkce* f_n *konvergují k funkci* f *podle míry* μ (píšeme $f_n \overset{\mu}{\to} f$), jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \lim_{n \to \infty} \mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\} = 0.$$

Věta 11.1 *Pro* $1 \le p \le \infty$ *a* $f_n, f \in L^p(\mu)$ *platí:*

$$f_n \overset{L^p}{\to} f \implies f_n \overset{\mu}{\to} f.$$

Tvrzení 11.2 (Čebyševova nerovnost) *Nechť* $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\mu)$ *a* $c > 0$. *Pak*

$$\mu\{x \in X : |f(x)| \ge c\} \le \frac{\|f\|_p^p}{c^p}.$$

Důkaz: Platí

$$\mu\{|f| \geq c\} = \int_{\{|f|\geq c\}} 1\, d\mu \leq \int_{\{|f|\geq c\}} \left(\frac{|f|}{c}\right)^p d\mu \leq \int \left(\frac{|f|}{c}\right)^p d\mu = \frac{\|f\|_p^p}{c^p}.$$

$\square$

Důkaz Věty 11.1: Je-li $p = \infty$ a $\varepsilon > 0$, pak existuje n_0 takové, že $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$, a tedy $\mu\{|f_n - f| \geq \varepsilon\} = 0$, pro $n > n_0$.

Je-li $p < \infty$, plyne tvrzení přímo z Čebyševovy nerovnosti. $\square$

Věta 11.3 (Jegorov) *Nechť $\mu(X) < \infty$, f_n, f jsou reálné měřitelné funkce na X, $f_n \to f$ μ-s.v., a $\varepsilon > 0$. Pak existuje $E \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(E) < \varepsilon$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $X \setminus E$.*

Důkaz: Existuje množina N nulové míry taková, že $f_n(x) \to f(x)$, $x \in X \setminus N$. Položme

$$A_{m,k} := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \tfrac{1}{k} \text{ pro každé } n \geq m\}, \quad m, k \in \mathbb{N}.$$

Pak pro každé k platí $A_{1,k} \subset A_{2,k} \subset \dots$ a z definice konvergence platí

$$\bigcap_m (X \setminus A_{m,k}) \subset N.$$

Podle věty o spojitosti míry a díky konečnosti μ tedy existuje $m(k)$ takové, že $\mu(X \setminus A_{m(k),k}) < \varepsilon 2^{-k}$. Položme $E := \bigcup_{k=1}^\infty (X \setminus A_{m(k),k})$. Zřejmě $\mu(E) < \varepsilon$. Nechť $x \in X \setminus E$. Pak $x \in A_{m(k),k}$ pro všechna k, a tedy $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ kdykoliv $n \geq m(k)$. Tím je dokázána stejnoměrná konvergence f_n k f na $X \setminus E$. $\square$

Důsledek 11.4 *Jestliže $\mu(X) < \infty$ a f_n, f jsou reálné měřitelné funkce na X takové, že $f_n \to f$ μ-s.v., pak $f_n \xrightarrow{\mu} f$.*

Důkaz: Pro $\varepsilon, \delta > 0$ platí

$$\mu\{|f_n - f| \geq \delta\} = \mu(\{|f_n - f| \geq \delta\} \cap E) + \mu(\{|f_n - f| \geq \delta\} \setminus E),$$

kde E je množina z Jegorovovy věty. První sčítanec je pak menší než ε a druhý je roven nule pro dostatečně velká n. $\square$

Pozn.: Funkce $f_n = \chi_{[n,\infty)}$ konvergují bodově k nule, ale nikoliv podle míry λ^1. Předpoklad konečnosti míry je tedy v Jegorovově větě nutný.

Tvrzení 11.5 *Jestliže $f_n \xrightarrow{\mu} f$ na prostoru s konečnou mírou μ, pak existuje vybraná podposloupnost (f_{n_j}) taková, že $f_{n_j} \to f$ μ-s.v.*

Důkaz Ke každému $j \in \mathbb{N}$ existuje $n_j \in \mathbb{N}$ takové, že $\mu\{|f_n - f| \geq 2^{-j}\} < 2^{-j}$ kdykoliv $n \geq n_j$. Položme

$$A_j := \{x \in X : |f_{n_j}(x) - f(x)| > 2^{-j}\}, \quad A := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j.$$

Platí

$$\mu(A) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \mu(A_j) \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} = 2^{1-k},\ k \in \mathbb{N},$$

tedy $\mu(A) = 0$. Přitom $f_{n_j}(x) \to f(x)$, $j \to \infty$, kdykoliv $x \in X \setminus A$. $\square$