(1) Najděte def. obor a vyšetřete spojitost funkce
$$F(a) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{x^{3/2}}\, dx .$$

Řešení: označme $f(a,x) = \dfrac{1-e^{-ax}}{x^{3/2}}$.

(A) konvergence: • $f(a,\cdot)$ spojitá na $(0,\infty)$

$\underline{a<0}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(a,x) = -\infty$

$\Rightarrow$ $\int_0^\infty f(a,x)\,dx$ nekonverguje
(srovnáním s konst. funkcí)

$\underline{a=0}$ $f(a,x) = 0$ konverguje

$\underline{a>0}$: • $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{f(a,x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{1-e^{-ax}}{x} = a$

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ konv. $\Rightarrow$ $\int_0^1 f(a,x)\,dx$ konv.

• $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(a,x)}{\frac{1}{x^{3/2}}} = 1$

$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ konv. $\Rightarrow$ $\int_1^\infty f(a,x)\,dx$ konv.

Závěr: $\int_0^\infty f(a,x)\,dx$ konv. $\Leftrightarrow$ $a \geq 0$

$$\underline{\underline{\mathcal{D}_F = [0,\infty)}}$$

(B) <u>spojitost:</u>

(i) $x \mapsto f(a,x)$ je spojitá, tedy měřitelná, pro každé $a \geq 0$

(ii) $a \mapsto f(a,x)$ je spojitá pro každé $x > 0$

(iii) $$\sup_{a \geq 0} |f(a,x)| = \frac{1}{x^{3/2}} \notin \mathcal{L}^1(0,\infty)$$
(diverguje u 0)

$$\sup_{0 \leq a \leq K} |f(a,x)| = \frac{1 - e^{-Kx}}{x^{3/2}} \in \mathcal{L}^1(0,\infty)$$

Tedy podle Leb. věty o spojité závislosti je funkce F spojitá na $[0,K]$ pro každé $K > 0$.

Tedy F je spojitá na $[0,\infty)$.

(2) Spočtěte $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 \log \frac{1}{x}}{1-x^2}\,dx.$

Řešení: Rozvineme do geometrické řady:

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, \quad x \in (0,1). \text{ Pak}$$

$$I = \int_0^1 \frac{x^2 \log \frac{1}{x}}{1-x^2}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{x^{2n+2}(-\log x)}_{f_n(x)}\,dx.$$

Spočteme

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \underbrace{x^{2n+2}}_{u'}\underbrace{(-\log x)}_{v}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}(-\log x)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{2n+3}\frac{1}{x}\,dx$$

$$= 0 + \left[\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{(2n+3)^2}$$

Protože f_n jsou nezáporné měřitelné funkce, můžeme prohodit sumu a integrál (Leviho věta):

$$I = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$$

$$-1 = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} - 1 = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{8} - 1}}$$

(3) Spočtěte Lebesgueovu míru množiny

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 - y^2 + z^2 \le 2z,\ |y| \le 1\}.$$

<u>Řešení:</u> Upravíme nerovnosti:

$$2x^2 - y^2 + (z-1)^2 \le 1, \quad -1 \le y \le 1 .$$

Zvolíme mírně upravené válcové souřadnice:

$$\varphi : \begin{cases} x = \dfrac{r}{\sqrt{2}} \cos t \\ y = s \\ z = 1 + r \sin t \end{cases} \quad \left| \quad \begin{array}{l} r > 0 \\ t \in (-\pi, \pi) \\ s \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

s Jakobiánem $J\varphi(r,t,s) = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$. Pak

$$\varphi^{-1}(T) = \{(r,t,s) : r^2 - s^2 \le 1,\ r > 0,\ t \in (-\pi,\pi),\ s \in (-1,1)\}$$

a podle Fubiniovy věty platí

$$\lambda^3(T) = \iiint_{\varphi^{-1}(T)} \frac{r}{\sqrt{2}}\, dr\, dt\, ds = 2\pi \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1+s^2}} \frac{r}{\sqrt{2}}\, dr\, ds$$

$$= \sqrt{2}\pi \int_{-1}^{1} \frac{1+s^2}{2}\, ds = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[s + \frac{s^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} \right)$$

$$= \underline{\frac{8\pi}{3\sqrt{2}}}$$