
2. Domácí test

NMFM202 – Pravděpodobnost pro finanční matematiky

28. 4. 2026

1. (5 bodů) Náhodný vektor $(X, Y)^\top$ má rozdělení s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{12}{5}x & \text{pro } x - 1 < y < x^2, x \in (0, 1), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- (a) Spočítejte hustotu podmíněného rozdělení $Y \mid X$. [1b]
(b) Spočítejte podmíněnou střední hodnotu $E[Y \mid X = x]$ a načrtněte. [1,5b]
(c) Nalezněte $x \in \mathbb{R}$ takové, že $E[Y \mid X = x] = 0$, a určete $E\left[\frac{Y}{X + \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \mid X\right]$. [1b]
(d) Spočítejte podmíněný rozptyl $\text{Var}[Y \mid X = x]$. [1,5b]

Hint: lze využít vzorce $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

2. (5 bodů) Nechtě X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny. X má rovnoměrné rozdělení na $(-1, 1)$ a Y má rovnoměrné rozdělení na $(-4, 4)$.

- (a) Určete hustoty náhodných veličin $U = |X|$ a $V = \sqrt{|Y|}$. [3b]
(b) Určete hustotu náhodné veličiny $Z = |X| + \sqrt{|Y|}$. [2b]

3. (5 bodů) Náhodný vektor $(X, Y)^\top$ má rovnoměrné rozdělení na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, 0 < y < 4(1 - x^2)\}.$$

- (a) Určete hustotu náhodného vektoru $(X, Y)^\top$. [1b]
(b) Určete hustotu náhodného vektoru $(U, V)^\top = (X^2, X^2 + \frac{Y}{2})^\top$. [3b]
(*Detailně vysvětlete použití věty o transformaci a zakreslete nosiče obou náhodných vektorů.*)
(c) Určete marginální rozdělení veličin U a V . [1b]