

7. cvičení Transformace náhodných veličin

1. Nechť $X \sim R(0, 1)$. Určete rozdělení $Y = -\frac{1}{\theta} \log X$, kde $\theta > 0$.
2. Nechť $X \sim \text{Exp}(1)$. Určete hustotu náhodné veličiny $Y = a - b \log X$, kde $b > 0$. (Toto rozdělení se nazývá Gumbelovo).
3. Nechť $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ jsou parametry. Nechť $Y = d + \exp(X)$.
 - (a) Určete hustotu náhodné veličiny Y .
 - (b) Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny Y .
4. Nechť $X \sim R(-\pi/2, \pi/2)$. Najděte distribuční funkci a hustotu veličiny $Y = \sin(X)$. Určete střední hodnotu a medián Y .
5. Nechť X má beta rozdělení $B(a, b)$, kde $a > 0$, $b > 0$ jsou parametry. To jest, X má hustotu

$$f(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} \mathbb{1}_{(0,1)}(x), \quad \text{kde } B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \text{ je beta funkce.}$$

Určete hustotu náhodné veličiny Y , která je dána následujícím vzorcem

$$Y = \log\left(\frac{X}{1-X}\right).$$

6. Nechť $X \sim N(0, 1)$. Určete distribuční funkci a hustotu náhodné veličiny $Y = |X|$.
7. Nechť $X \sim R(-1, 2)$ a $Y = X^2$. Určete hustotu náhodné veličiny Y .
8. Nechť náhodná veličina X má rozdělení popsané předpisem

$$P(X = k\pi/4) = \frac{e^{-1}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Jaké rozdělení má náhodná veličina $Y = \cos(X)$?

9. Nechť $X \sim \text{Po}(\lambda_1)$ a $Y \sim \text{Po}(\lambda_2)$ jsou nezávislé. Určete rozdělení $Z = X + Y$.
10. X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s rozděleními

$$\begin{aligned} P(X = n) &= (1 - p_1)^n p_1, \quad n = 0, 1, \dots, \\ P(Y = n) &= (1 - p_2)^n p_2, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Najděte rozdělení náhodné veličiny $Z = X + Y$.

Opakování z přednášky

Rozdělení funkce spojitě náhodné veličiny Nechť X je náhodná veličina s distribuční funkcí F_X a nosičem S_X . Chceme vypočítat rozdělení náhodné veličiny $Y = t(X)$, kde t je borelovsky měřitelná funkce.

Označme F_Y distribuční funkci náhodné veličiny Y . Potom

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(t(X) \leq y) = P(X \in \{x : t(x) \leq y\}). \quad (1)$$

Hustotu f_Y veličiny Y dostaneme jako derivaci distribuční funkce F_Y , tj. $f_Y(y) = F_Y'(y)$.

Nechť t je ryze rostoucí (resp. klesající) na S_X a τ je funkce inverzní k t na $t(S_X)$. Potom můžeme pro $y \in t(S_X)$ upravit (5) na tvar

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X \leq \tau(y)) = F_X(\tau(y)), \quad (2)$$

$$\text{resp. } F_Y(y) = \mathbb{P}(X \geq \tau(y)) = 1 - F_X(\tau(y)). \quad (3)$$

Všimněte si, že se stačí explicitně zabývat pouze případem $y \in t(S_X)$, protože v opačném je $F_Y(y)$ buď nula nebo jednička.

Pokud má navíc X spojitě rozdělení s hustotou f_X a t má všude nenulovou derivaci, potom derivováním pravé strany rovnosti (6) (resp. (7)) dostáváme

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(\tau(y)) |\tau'(y)|, & y \in t(S_X), \\ 0, & y \notin t(S_X). \end{cases} \quad (4)$$

Nemonotonní transformace Nechť existují množiny $G_k \subseteq S_X$, $k = 1, 2, \dots$, takové, že $\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = S_X$, $G_i \cap G_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, a t je ryze monotonní na každém G_k .

- Označme \mathcal{K}^+ množinu všech indexů k takových, že t roste na G_k a \mathcal{K}^- množinu všech indexů k takových, že t klesá na G_k .
- Označme t_k funkci t restriktovanou na G_k , třeba $t_k(x) = t(x)\mathbb{1}_{G_k}(x)$. Pak pro $y \in t_k(G_k)$ existuje inverze funkce ke t_k , kterou si označíme τ_k .
- Označme $X_k = X\mathbb{1}_{G_k}(X)$, $Y_k = t_k(X_k)$. Máme $X = \sum_{k=1}^{\infty} X_k$ a $Y = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k$.

Za daných předpokladů platí

$$F_Y(y) = \sum_{k \in \mathcal{K}^+} \mathbb{P}(X_k \leq \tau_k(y), X \in G_k) + \sum_{k \in \mathcal{K}^-} \mathbb{P}(X_k \geq \tau_k(y), X \in G_k).$$

Nechť má navíc X hustotu vzhledem k Lebesgueově míře a nechť je každá τ_k diferencovatelná (skoro všude) v G_k . Pak Y má hustotu

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_X(\tau_k(y)) |\tau_k'(y)| \mathbb{1}_{t_k(G_k)}(y).$$

Rozdělení součtu diskrétních náhodných veličin. Jestliže X, Y jsou náhodné veličiny, které nabývají pouze nezáporných celočíselných hodnot, potom pro rozdělení náhodné veličiny $Z = X + Y$ platí

$$\mathbb{P}(Z = n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k, Y = n - k).$$

Jsou-li X, Y navíc **nezávislé**, pak platí

$$\mathbb{P}(Z = n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = n - k).$$