Příklady k procvičení

Analytická geometrie III - LS 2015/16

verze 27. 4. 2016

1. Vyšetřete vzájemnou polohu rovin $\alpha = \langle A, \vec{t}, \vec{u} \rangle$ a $\beta = \langle B, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ v $\mathbb{R}^5$, pokud je dáno
   (a) $A = [1, 3, 0, 0, 0]$, $\vec{t} = (1, 0, 0, 0, 0)$, $\vec{u} = (0, 5, 0, 1, 0)$
   $B = [0, 0, 3, 0, -1]$, $\vec{v} = (0, 0, 3, 2, 0)$, $\vec{w} = (0, 1, 1, 1, 1)$.
   (b) $A = [0, 0, 0, 0, 0]$, $\vec{t} = (1, 2, 0, -1, 0)$, $\vec{u} = (0, 1, 1, 0, 0)$
   $B = [2, 1, 0, 0, 0]$, $\vec{v} = (0, 0, -1, 0, 3)$, $\vec{w} = (2, 3, -2, -2, 3)$.
   (c) $A = [1, 0, -1, 0, 0]$, $\vec{t} = (1, 3, -1, 0, 1)$, $\vec{u} = (0, 0, 0, 1, 0)$
   $B = [2, 0, 3, 2, -1]$, $\vec{v} = (0, 0, 2, 1, 0)$, $\vec{w} = (-1, 0, 0, 0, 1)$.

2. Vyšetřete vzájemnou polohu rovin $\alpha = \langle A, \vec{t}, \vec{u} \rangle$ a $\beta = \langle B, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ v $\mathbb{R}^4$, pokud je dáno
   $A = [3, 3, -3, -3]$, $\vec{t} = (1, 4, 1, 6)$, $\vec{u} = (1, 2, -1, 0)$
   $B = [7, -9, -5, -7]$, $\vec{v} = (3, -3, -1, 1)$, $\vec{w} = (3, -5, -3, -5)$.

3. Napište analytické vyjádření souměrnosti podle roviny v $\mathbb{E}^3$, při které se bod $[1, 0, 5]$ zobrazí na bod $[0, 5, 1]$.

4. Najděte samodružné body shodnosti $\mathbb{E}^3$ složené ze souměrnosti podle roviny $z = 0$ a souměrnosti podle roviny $x - y + 2z - 1 = 0$.

5. V $\mathbb{E}^3$ jsou dány přímky $p = \{[4, 0, -1], (3, -1, -2)\}$ a $q : X(t) = [t, -5t, 4t], t \in \mathbb{R}$. Označme f_p a f_q souměrnosti prostoru podle těchto přímek. Určete analytické vyjádření, samodružné body a směry zobrazení $f = f_q \circ f_p$.

6. Ověřte, že rovnicemi

$$\begin{aligned} x' &= y - 2z + 1 \\ y' &= -x + 2y - 2z + 1 \\ z' &= x - y + 3z - 1. \end{aligned}$$

   je v afinním prostoru A^3 dána základní afinita. Určete rovinu jejích samodružných bodů a její charakteristiku, není-li to elace.

7. Je dána rovina $\rho = \{[1, 0, 6], (1, 3, 1), (0, -2, 5)\}$ a body $B = [1, 1, 0]$, $B' = [0, 2, 7]$. Určete analytické vyjádření základní afinity f, pro kterou $f(B) = B'$, a jejíž množinou samodružných bodů je rovina ρ.

Výsledky

1. (a) Roviny jsou mimoběžné a nemají žádný společný směr.
   (b) Roviny jsou mimoběžné ale mají společný směr $(2, 3, -1, -2, 0)$.
   (c) Roviny jsou různoběžné a mají společný průsečík $A = [1, 0, -1, 0, 0]$.

2. Roviny jsou různoběžné a mají společnou přímku určenou bodem $[1, 0, 0, 0]$ a vektorem $(0, 1, 1, 3)$.

3. Analytické vyjádření je

$$\begin{aligned} 21x' &= 20x + 5y - 4z \\ 21y' &= 5x - 4y + 20z \\ 21z' &= -4x + 20y + 5z. \end{aligned}$$

4. Samodružné body jsou body přímky $[t + 1, t, 0]$, kde $t \in \mathbb{R}$.

5. Analytické vyjádření souměrností

$$f_p: \begin{aligned} x' &= \tfrac{1}{7}(2x-3y-6z)+2, \\ y' &= \tfrac{1}{7}(-3x-6y+2z)+2, \\ z' &= \tfrac{1}{7}(-6x+2y-3z)+2, \end{aligned} \qquad f_q: \begin{aligned} x' &= \tfrac{1}{21}(-20x-5y+4z) \\ y' &= \tfrac{1}{21}(-5x+4y-20z) \\ z' &= \tfrac{1}{21}(4x-20y-5z). \end{aligned}$$

Analytické vyjádření složeného zobrazení

$$\begin{aligned} f: x' &= \frac{1}{3}(-x+2y+2z)-2 \\ y' &= \frac{1}{3}(2x-y+2z)-2 \\ z' &= \frac{1}{3}(2x+2y-z)-2. \end{aligned}$$

Zobrazení f nemá samodružné body, samodružné směry: $(1,1,1)$ a rovina samodružných směrů určená například vektory $(1,0,-1)$ a $(0,1,-1)$.

6. Roviny samodružných bodů je $x-y+2z-1=0$, zvolíme-li např. bod $X=[0,0,1]$, je $X'=[-1,-1,2]$, $\bar{X}=[\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ odkud je charakteristika $k=(\bar{X},X,X')=\frac{1}{3}$.

7. Rovina ρ je dána obecnou rovnicí $17x-5y-2z-5=0$, základní afinita má analytické vyjádření

$$\begin{aligned} f: x' &= \frac{1}{7}(-10x+5y+2z+5) \\ y' &= \frac{1}{7}(17x+2y-2z-5) \\ z' &= 17x-5y-z-5. \end{aligned}$$