Geometrie
ZS 2020/21

1. série domácích úkolů (Opakování)
termín odevzdání 29.11.2020

Vyřešte 8 úloh, za podmínky, že z každé skupiny vyřešíte alespoň 2 úlohy. Řešení odevzdávejte do moodle jako jeden soubor ve formátu .pdf; buďto čitelně napsané + kvalitně naskenované, nebo vypracováno v nějakém textovém (např. LaTeX, nebo MS Word) a grafickém editoru (např. GeoGebra).

Pozn. Najdete-li chybu, neváhejte mi napsat, může to ušetřit tápání Vašich kolegů.
Pozn. 2: Sloučení skenů do .pdf je součastí běžně dostupného softwaru, obyčejně postačuje kvalita 200-300dpi. Další možnost je použít fakultní počítače v R319, na kterých je nainstalována verze Adobe Acrobat Pro, ve které je možné vytvořit sloučené .pdf z různých vstupních souborů (obrázky, dokumenty). V MacOS je možné jednoduše použít ke stejnému účelu zabudovaný program Preview.

Analytická geometrie

1. Vyšetřete vzájemnou polohu přímek p, q v $\mathbb{R}^3$ je-li
   a) přímka p určená bodem $[0, 0, -1]$ a směrovým vektorem $(1, 1, 3)$ a přímka q prochází bodem $[0, -1, 2]$ a má směrový vektor $(2, 3, 3)$.
   b) přímka p průsečnicí rovin s obecnými rovnicemi $x - 3y - z + 1 = 0$ a $-2x + 2y + z = 0$ a přímka q prochází bodem $[a, 0, 0]$ a má směrový vektor $(1, -1, b)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou parametry.
2. V $\mathbb{R}^3$ jsou dány body $A = [1, 2, -1], B = [2, 2, 0], C = [3, 1, -1]$. Rozhodněte zda tyto body určují jednoznačně rovinu, pokud ano určete její obecnou rovnici.
3. Vyberte z množiny $\{(1, 0, 1), (3, 2, 1), (1, 2, 3), (1, 0, -2), (0, 3, -1)\}$ nějakou bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ a vyjádřete zbylé vektory jako lineární kombinaci vektorů báze.
4. Vyberte z množiny $\{(1, 0, 1, 0), (3, 1, -2, 1), (1, \sqrt{2}, 0, -1), (1, 0, 0, -2), (5, 0, 3, -1)\}$ nějakou bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ a vyjádřete zbylé vektory jako lineární kombinaci vektorů báze.
5. Je dán rovnoběžnostěn $ABCDEFGH$. Určete souřadnice vrcholů vzhledem k lineární soustavě souřadnic určené repérem $\mathcal{R}$:
   a) $\mathcal{R} = \langle A; B - A, D - A, E - A\rangle$
   b) $\mathcal{R} = \langle F; D - F, G - F, H - F\rangle$
6. Je dán pravidelný čtyřstěn o délce strany $a = 1$. Zvolte vhodně (!) soustavu souřadnic a popište osu mimoběžek $\overline{AD}, \overline{BC}$. Vypočítejte jejich vzdálenost.
7. Zjistěte, který z daných trojúhelníků má všechny vnitřní úhly ostré a který má jeden z vnitřních úhlů tupý:
   a) $A = [0, -2, 2], B = [-4, 10, -6], C = [-1, 4, -4]$
   b) $A = [1, 3, 6], B = [-4, 6, -2], C = [3, 6, 0]$
   c) $A = [3, -1, 2], B = [0, -4, 2], C = [-3, 2, 1]$

8. Na ose z najděte takový bod C, aby body $A = [-4, 1, 7], B = [3, 5, -2], C$ byly vrcholy rovnoramenného trojúhelníku.

9. Najděte bod, který má od čtyř bodů $A = [2, 0, 0], B = [0, 4, 0], C = [0, 0, 6], D = [8, 4, 10]$ stejnou vzdálenost.

10. Čtyřstěn má objem $V = 5$ a tři vrcholy $A = [1, 2, -1], B = [2, 1, 1], C = [1, 0, 3]$. Najděte souřadnice vrholu D, který leží na ose y.

11. Zjistěte, jestli čtyřúhelník s vrcholmi $A = [5, 2, 6], B = [6, 4, 4], C = [4, 3, 2], D = [3, 1, 4]$ je čtverec.

12. Najděte průmět vektoru $a = (6, 3, 6)$ do osy určenej vektorem $b = (-1, 3, 2)$.

13. Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC, je-li $A = [3, 1, 4], B = [0, 2, 1], C = [5, 0, 8]$.

14. Najděte objem rovnoběžnostěnu určeného trojicí vektorů a, b, c, platí-li $||a|| = 2, ||b|| = 4, ||c|| = 8$ a vektory a, b, c svírají navzájem úhel $60°$.

15. Určete všechny vzájemné polohy a) tří přímek b) tří rovin v prostoru (udělejte náčrtek).

16. Určete souřadnice středu kružnice vepsané trojúhelníku $\triangle ABC$, pro $A = [1, \frac{13}{4}], B = [\frac{32}{7}, \frac{4}{7}], C = [2, 4]$.

17. Jsou dány množiny bodů $\mathbf{A} : A[-a, a^2]$ a $\mathbf{B} : B[b, b^2]$ v $\mathbb{R}$ pro $1 < a, b \in \mathbb{Z}$.

    a) Najděte množinu $\mathbf{P}$ průsečíků P spojnic $\overline{AB}$ s osou y.

    b) Zamyslete (!) se nad y-ovými souřadnicemi bodů P a napište jakou číselnou množinu popisují.

18. V $\mathbb{E}^3$ jsou dány roviny:

$$\beta : 5x - 2y + 5z - 10 = 0$$
$$\gamma : x - 4y - 8z + 12 = 0.$$

    a) Určete rovnici roviny α, která je kolmá k rovině β a s rovinou γ svírá úhel $45°$. 5b

    b) Určete objem jehlanu, jehož boční stěny jsou α, β a γ, které se protínají ve vrcholu V, a pata výšky z vrcholu V na protější stěnu leží v počátku soustavy souřadnic. 5b

19. a) Určete rovnici roviny ρ v $\mathbb{E}^3$, která prochází přímkou p danou bodem $P = (-3, 4, -2)$ a směrovým vektorem $\overrightarrow{s}_p = (-3, 1, 1)$ a se souřadnicovou osou y svírá úhel $\sphericalangle(\rho, y) = 45°$.

    b) Určete průnik roviny ρ s rovinou (x, z).

Zobrazení

20. Určete analytické vyjádření a druh afinity, která převádí trojúhelník ABC do trojúhelníku BCA.
(A=[0,0]; B=[4,0]; C=[0,2])

21. Je dáno zobrazení prostoru $\mathbb{E}^3$ na sebe

$$2x' = x + y - z$$
$$y' = x + z$$
$$2z' = -x + y + z$$

Určete, typ zobrazení a nalezněte samodružné body a směry tohoto zobrazení.

22. Je dáno podobné zobrazení prostoru $\mathbb{E}^3$ na sebe

$$7x' = -4x + 12y - 6z - 51$$
$$7y' = 12x + 6y + 4z + 27$$
$$7z' = -6x + 4y + 12z - 24$$

Určete, zda se jedná o přímou nebo nepřímou podobnost a nalezněte samodružné body, směry a koeficient podobnosti tohoto zobrazení.

23. Je dáno zobrazení $\mathbb{E}^3$ na sebe

$$\begin{aligned} 7x' &= 2x - 6y + 3z \\ 7y' &= 3x - 2y - 6z \\ 7z' &= 6x + 3y + 2z. \end{aligned}$$

Určete typ zobrazení a nalezněte obrazy

a) souřadných rovin (xy,xz,yz)

b) přímky, která prochází počátkem a bodem $A = [7, 7, 14]$.

24. Je dáno zobrazení $\mathbb{E}^3$ na sebe

$$\begin{aligned} 2x' &= x - \sqrt{3}z \\ y' &= y \\ 2z' &= -\sqrt{3}x - z. \end{aligned}$$

Určete typ zobrazení (afinní/podobné/shodné + případné dourčení) a nalezněte obrazy

a) roviny $x + y - z = 0$

b) přímky, která prochází počátkem a bodem $A = [1, 0, 1]$.

25. Je dáno zobrazení $\mathbb{E}^3$ na sebe

$$\begin{aligned} 5x' &= 8x - 6y + 6 \\ 5y' &= -6x - 8y - 12 \\ 5z' &= -10z. \end{aligned}$$

Určete typ zobrazení a nalezněte **vzor**

a) čtyřúhelníku $A'B'C'D'$, pro $A' = [-10, 0, 0], B' = [6, -12, 0], C' = [6, -12, 20], D'[-10, 0, 20]$

b) určete o jaký čtyřúhelník $ABCD$ se jedná v a).

26. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$, bod O je střed hrany AD, S_1 střed stěny $ABB'A'$, S_2 střed stěny $BCC'B'$ a S střed krychle. Je-li $\mathbf{Z}_1$ středová souměrnost se středem S_1, $\mathbf{Z}_2$ středová souměrnost se středem S_2, $\mathbf{Z}_3$ posunutí určené orientovanou úsečkou $\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{Z}_4$ souměrnost podle roviny S_1S_2S a $\mathbf{Z}_5$ osová souměrnost s osou SS_2, určete zobrazení $\mathbf{Z}$, které vznikne složením $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_4, \mathbf{Z}_5$ v tomto pořadí.

27. Je dáno zobrazení $\mathbb{E}^3$ na sebe

$$\begin{aligned} 3x' &= 2x + 2y - z + 3 \\ 3y' &= -x + 2y + 2z - 3 \\ 3z' &= 2x - y + 2z + 6. \end{aligned}$$

a) Určete typ (afinní/podobné/shodné + případné dourčení) a samodružné body a směry tohoto zobrazení. 6b

b) V rovině dané rovnicí $x+y+z+1 = 0$ zvolte libovolné dva různé body $A \neq B$, určete jejich obrazy A', B' a spočítejte odchylku vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{A'B'}$. 3b

c) Existuje v prostoru přímka, jejíž obraz bude rovnoběžný se vzorem? Jestli ano napište její libovolné analytické vyjádření. 1b

28. Je dáno zobrazení $\mathbb{E}^3$ na sebe

$$9x' = 4x + y + 8z - 3$$
$$9y' = 7x + 4y - 4z + 2$$
$$9z' = 4x - 8y - z + 9.$$

a) Určete typ (afinní/podobné/shodné + případné dourčení) a samodružné body a směry tohoto zobrazení. 6b

b) Určete obraz vrcholů čtyřstěnu, jehož vrcholy jsou body $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ a obraz výšky čtyřstěnu procházející vrcholem $(0,0,0)$. 3b

c) Určete objem zobrazeného čtyřstěnu. 1b

29. Je dáno zobrazení $\mathbb{E}^3$ na sebe

$$x' = -2x - 2y + 2z + 1$$
$$y' = 2x + 3y - 3z$$
$$z' = y - z + 4.$$

a) Určete typ (afinní/podobné/shodné + případné dourčení) a samodružné body a směry tohoto zobrazení. 6b

b) Určete na jaký útvar se zobrazí jednotková krychle, jejíž vrcholy jsou body
$A = [0,0,0], B = [1,0,0], C = [1,1,0], D = [0,1,0], E = [0,0,1], F = [1,0,1], G = [1,1,1], H = [0,1,1]$. 2b

c) Určete obsah plochy ohraničující zobrazenou krychli. 2b

30. Najděte analytické vyjádření souměrnosti prostoru $\mathbb{E}^3$ podle přímky p se směrovým vektorem $\overrightarrow{s}_p = (0,3,1)$ a procházející bodem $B = [1,-2,0]$.

Kuželosečky

31. Všechny paraboly jsou si podobné. Dokažte.

Určete typ kuželosečky a její vlastnosti (v závislosti od typu) - regulární/singulární, ne/středová, asymptoty, osy, ohniska, řídicí přímku

32. $x - xy + y = 0$; a dále určete rovnic tečen z bodu $P = [1,-1]$

33. $y^2 - 2y + 1 = 0$; a dále najděte její průsečíky s kružnicí $x^2 + y^2 = 2$

34. $4x^2 - y^2 - 16x - 6y + 7 = 0$; a napište rovnici kuželosečky, kterou tvoří její osy

35. $4x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 6y + 5 = 0$; a napište rovnici poláry v bodě $P = [0,1]$

36. $xy - 3x + 4y = 0$; a určete rovnice poláry a tečny z bodu $P = [-4,1]$