Geometrie
ZS 2020/21

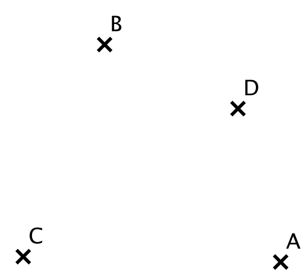
2. série domácích úkolů (Projektivní prostory, kvadriky)
termín odevzdání do 17.1.2021

Vyřešte 8 úloh, za podmínky, že z každé skupiny vyřešíte alespoň 2 úlohy. Řešení odevzdávejte do moodle jako jeden soubor ve formátu .pdf; buďto čitelně napsané + kvalitně naskenované, nebo vypracováno v nějakém textovém (např. LaTeX, nebo MS Word) a grafickém editoru (např. GeoGebra).

Pozn. Najdete-li chybu, neváhejte mi napsat, může to ušetřit tápání Vašich kolegů.
Pozn. 2: Sloučení skenů do .pdf je součastí běžně dostupného softwaru, obyčejně postačuje kvalita 200-300dpi. Další možnost je použít fakultní počítače v R319, na kterých je nainstalována verze Adobe Acrobat Pro, ve které je možné vytvořit sloučené .pdf z různých vstupních souborů (obrázky, dokumenty). V MacOS je možné jednoduše použít ke stejnému účelu zabudovaný program Preview.

Projektivní prostory

1. V $\mathbb{RP}^2$ jsou dány body $A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0), C = (0, 0, 1), D = (1, 1, 1)$ (viz obrázek).
   (a) Určete souřadnice bodů $X = \overline{AB} \cap \overline{CD},\ Y = \overline{AC} \cap \overline{BD},\ Z = \overline{AD} \cap \overline{BC}$.
   (b) Dokažte, že přímka $\overline{XY}$ protíná čtyřúhelník $ABCD$ v harmonicky sdružených bodech vzhledem k páru X, Y.



2. V prostoru je dána krychle $ABCDEFGH$ a její stín $A'B'C'D'E'F'G'H'$ v rovině ρ při středovém osvětlení z bodu S (viz obrázek + soubor `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/documents/geometrie/du_2_pr3.ggb`). Souřadnice bodů krychle v $\mathbb{RP}^3$ jsou:

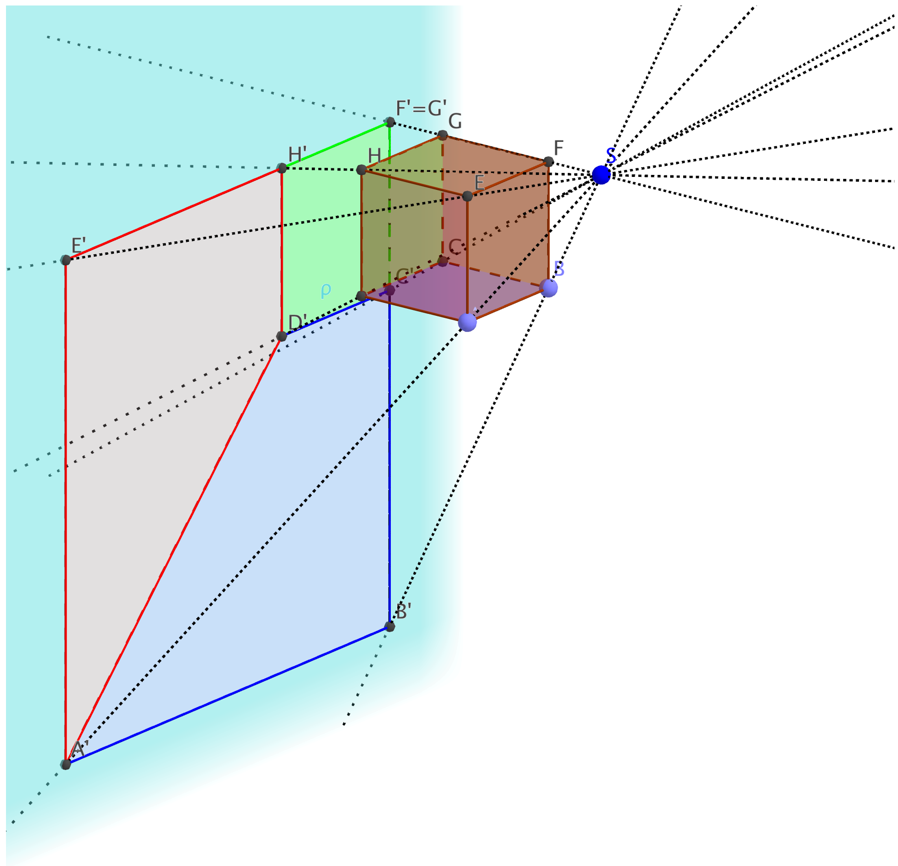
$A = (6, 0, 0, 1)$	$C = (2, 4, 0, 1)$	$E = (6, 0, 4, 1)$	$G = (2, 4, 4, 1)$
$B = (6, 4, 0, 1)$	$D = (2, 0, 0, 1)$	$F = (6, 4, 4, 1)$	$H = (2, 0, 4, 1)$

Souřadnice bodů stínu v $\mathbb{RP}^2$ jsou:

$A = (-12, -12, 1)$ $\quad$ $C = (4, -4/3, 1)$ $\quad$ $E = (-12, 4, 1)$ $\quad$ $G = (4, 4, 1)$

$B = (4, -12, 1)$ $\quad$ $D = (-4/3, -4/3, 1)$ $\quad$ $F = (4, 4, 1)$ $\quad$ $H = (-4/3, 4, 1)$

Určete matici kolineárního zobrazení mezi body krychle a body jejího stínu.



3. V $\mathbb{RP}^2$ jsou dány body $A = (0, 0, 1), B = (2, 0, 1), C = (1, 3, 1), D = (-1, -2, 1)$.

   a) Určete všechny samodružné body a matici kolineace, která zobrazuje body

$$A(0,0,1) \to A'(6,1,3)$$
$$B(2,0,1) \to B'(2,1,3)$$
$$C(1,3,1) \to C'(6,11,6)$$
$$D(-1,-2,1) \to D'(1,-1,0)$$

   b) V dané kolineaci najděte obraz nevlastní přímky.

   c) Určete průsečíky $P = \overleftrightarrow{CC'} \cap \overleftrightarrow{AB}$ a $Q = \overleftrightarrow{A'B'} \cap \overleftrightarrow{AB}$ a ověřte, zda bod D leží na přímce $\overleftrightarrow{PQ}$.

   d) Na přímce $\overleftrightarrow{AB}$ najděte bod W takový, že $(B, A; W, P) = -3$.

4. Kolineace f v $\mathbb{P}^2$ je dána páry odpovídajících si bodů:

$A = (0, 2, 1) \to A' = (-1, 2, 1)$ $\quad$ $C = (1, 0, 1) \to C' = (6, 0, 1)$

$B = (0, 1, 0) \to B' = (-2, 3, 1)$ $\quad$ $D = (1, 0, 0) \to D' = (3, 2, 0)$

   (a) Určete matici kolineace f.

   (b) Najděte obraz bodu $(1, 1, 1)$.

(c) Najděte vzor bodu $(-5,1,1)$

5. Dokažte: Nechť jsou dány přímky p, p' a bod O, který neleží na žádné z nich. Promítneme-li čtyři různé body A, B, C, D přímky p z bodu O na přímku p' do bodů A', B', C', D', potom platí $(AB;CD) = (A'B';C'D')$.

6. V $\mathbb{RP}^2$ jsou dány body $A = (0,0,1), B = (4,0,1), C = (2,2,1), D = (0,2,1)$.

   (a) Určete souřadnice přímek $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{AD}$, průsečík P přímek $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{CD}$ a průsečík Q přímek $\overleftrightarrow{BC}$ a $\overleftrightarrow{AD}$.

   (b) Najděte bod U na přímce $\overleftrightarrow{CD}$ tak, aby body D, C, P, U tvořili harmonickou čtveřici.

   (c) Určete všechny samodružné body a matici kolineace, která zobrazuje body

$$\begin{aligned}(0,0,1) &\to (0,1,1)\\(4,0,1) &\to (3,1,1)\\(2,2,1) &\to (1,3,1)\\(0,2,1) &\to (0,3,1)\end{aligned}$$

   (d) Najděte obraz přímky $\overleftrightarrow{AD}$ v dané kolineaci.

7. V $\mathbb{RP}^2$ jsou dány body $A = (0,-1,1), B = (2,0,1), C = (0,1,1), U = (1,0,0)$.

   (a) Určete souřadnice přímek $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AC}$ a průsečík P přímek $\overleftrightarrow{BU}$ a $\overleftrightarrow{AC}$.

   (b) Najděte bod T na přímce $\overleftrightarrow{BU}$ tak, aby dvojpoměr $(BP;UT) = -\frac{1}{2}$.

   (c) Určete všechny samodružné body a matici kolineace, která zobrazuje body

$$\begin{gathered}(0,-1,1) \to (0,-2,1)\\(2,0,1) \to (8,0,1)\\(-3,0,1) \to (-2,0,1)\\\text{bod } C \text{ je samodružný.}\end{gathered}$$

   (d) Najděte obraz nevlastní přímky v dané kolineaci.

Kvadriky

(*) U příkladů na klasifikaci kuželosečky určete

- projektivní vlastnosti - singulární/ regulární + singulární body, reálná/ formálně reálná
- afinní vlastnosti - typ KS, středová/ nestředová + střed, asymptotické směry + asymptoty
- metrické vlastnosti - hlavní a vedlejší směry, osy, vrcholy, ohniska, řídící přímku paraboly

8. Řešte úlohu 17 z 1. sady (o množině **P**) v homogenních souřadnicích v $\mathbb{RP}^2$.

9. V $\mathbb{R}^3$ je dána kvadrika: $\mathcal{Q}: x^2 + y^2 + z - 1 = 0$ a rovina $\rho: x - y - 2z + 1 = 0$.

   (a) Převeďte rovnice $\mathcal{Q}$ a ρ do homogenních souřadnic.

   (b) Klasifikujte kvadriku (afinně).

   (c) Určete množinu bodů, která je kolmým průmětem řezu kvadriky $\mathcal{Q}$ rovinou ρ do roviny $z = 0$ v $\mathbb{R}^3$.

10. V $\mathbb{R}^3$ je dána kvadrika: $\mathcal{Q}: x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 7 = 0$ a bod $P = [0,0,-7]$.

   (a) Převeďte rovnice $\mathcal{Q}$ do homogenních souřadnic.

   (b) Klasifikujte kvadriku (afinně).

   (c) Určete polární nadrovinu bodu P vzhledem ke $\mathcal{Q}$ a její průnik c s kvadrikou $\mathcal{Q}$.

   (d) Na ose z najděte bod harmonicky sdružený k bodu P vzhledem k páru průsečíků osy z s kvadrikou $\mathcal{Q}$.

(e) Napište rovnici dotykové kuželové plochy ke kvadrice $\mathcal{Q}$ s vrcholem v bodě P.

11. V $\mathbb{R}^2$ je dána kuželosečka $c : 7x^2 - 24xy - 38x + 24y + 175 = 0$ a bod $P = [1, 0]$

   (a) Převeďte rovnici c do homogenních souřadnic.

   (b) Klasifikujte kuželosečku c, t.j. určete:

      - projektivní vlastnosti - singulární/ regulární + singulární body, reálná/ formálně reálná
      - afinní vlastnosti - typ kuželosečky, středová/ nestředová + střed, asymptotické směry + asymptoty
      - metrické vlastnosti - hlavní směry, osy, vrcholy, ohniska, řídící přímku paraboly (v závislosti na typu KS)

   (c) Napište rovnice poláry p bodu P a tečen t_1, t_2 z bodu P ke kuželosečce c.

   (d) Najděte sdružené průměry kuželosečky, je-li jeden z nich rovnoběžný s přímkou $m : y = 0$.

12. V $\mathbb{R}^2$ je dána kuželosečka $c : 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$ a bod $P = [4, -3]$

   (a) Převeďte rovnici c do homogenních souřadnic.

   (b) Klasifikujte kuželosečku c, t.j. určete:

      - projektivní vlastnosti - singulární/ regulární + singulární body, reálná/ formálně reálná
      - afinní vlastnosti - typ kuželosečky, středová/ nestředová + střed, asymptotické směry + asymptoty
      - metrické vlastnosti - hlavní směry, osy, vrcholy

   (c) Jeden průvodič kuželosečky má rovnici $p_1 : -8x_1 + 6x_2 + 5x_0 = 0$. Určete druhý průvodič, ohniska, resp. řídící přímku paraboly (v závislosti na typu KS).

   (d) Napište rovnice poláry p bodu P a tečen t_1, t_2 z bodu P ke kuželosečce c.

13. V $\mathbb{R}^2$ je dána kuželosečka $c : 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 2y - 17 = 0$, bod $P = [1, 2]$ a přímka $q : x - 5 = 0$.

   (a) Převeďte rovnici c do homogenních souřadnic.

   (b) Klasifikujte kuželosečku c, t.j. určete:

      - projektivní vlastnosti - singulární/ regulární + singulární body, reálná/ formálně reálná
      - afinní vlastnosti - typ kuželosečky, středová/ nestředová + střed, asymptotické směry + asymptoty
      - metrické vlastnosti - hlavní směry, osy, vrcholy, ohniska, řídící přímku paraboly (v závislosti na typu KS)

   (c) Napište rovnice poláry p bodu P a pólu Q přímky q vzhledem ke kuželosečce c.

   (d) Napište v homogenních souřadnicích rovnici kuželosečky, kterou tvoří osy kuželosečky c.

14. V $\mathbb{R}^2$ je dána kuželosečka: $c : 4x^2 + 3y^2 - 16 = 0$ a bod $P = [4, 0]$.

   a) Převeďte rovnici c do homogenních souřadnic.

   b) Klasifikujte typ kuželosečky (*).

   c) Napište rovnice poláry p bodu P a tečen t_1, t_2 z bodu P ke kuželosečce c.

   d) Zvolte libovolnou sečnu s kuželosečky c a označte $X, Y = c \cap s$ a $Q = p \cap s$. Zjistěte hodnotu dvojpoměru $(X, Y; P, Q)$.

15. V $\mathbb{R}^2$ je dána kuželosečka: $c : 2x^2 - 4xy + 2y^2 + 2x + 2y + 10 = 0$ a směr $\overrightarrow{s} = (-1, 1)$.

   a) Převeďte rovnici c do homogenních souřadnic.

   b) Klasifikujte typ kuželosečky (*).

   c) Napište rovnice tečen t_1, t_2 ve směru $\overrightarrow{s}$ ke kuželosečce c.

16. V $\mathbb{R}^2$ je dána kuželosečka $c : xy + 2x + 3y = 0$ a bod $P = [-3, -2]$

   a) Převeďte rovnici c do homogenních souřadnic.

b) Klasifikujte typ kuželosečky (*).

c) Napište rovnice poláry p bodu P a tečen t_1, t_2 z bodu P ke kuželosečce c.

d) Pro libovolný bod $X = [x_0, y_0]$ kuželosečky vyjádřete (v $\mathbb{R}^2$) obsah obdélníku se stranami $\overline{UX}, \overline{VX}$, kde U, V jsou paty kolmic vedených z bodu X na asymptoty.

17. V $\mathbb{R}^2$ je dána kuželosečka $c : 4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 8y - 4 = 0$ a bod $P = [-1, -\frac{1}{2}]$.

a) Převeďte rovnici c do homogenních souřadnic.

b) Klasifikujte kuželosečku c, t.j. určete:

- projektivní vlastnosti - singulární/ regulární + singulární body, reálná/ formálně reálná
- afinní vlastnosti - typ kuželosečky, středová/ nestředová + střed, asymptotické směry + asymptoty
- metrické vlastnosti - hlavní směry, osy, vrcholy, ohniska, řídicí přímku paraboly (v závislosti na typu KS)

c) Napište rovnice tečen vedených z bodu P ke kuželosečce c.

d) Nechť T_1, T_2 jsou dotykové body tečen vedených z bodu P ke kuželosečce a F je ohnisko kuželosečky c. Ověřte, že PF je výška trojúhelníku PT_1T_2.

18. V $\mathbb{R}^2$ je dána kuželosečka $c : 2x^2 + 2y^2 - 12x - 8y + 12 = 0$ a bod $O = [0, 0]$.

a) Převeďte rovnici c do homogenních souřadnic.

b) Klasifikujte kuželosečku c, t.j. určete:

- projektivní vlastnosti - singulární/ regulární + singulární body, reálná/ formálně reálná
- afinní vlastnosti - typ kuželosečky, středová/ nestředová + střed, asymptotické směry + asymptoty
- metrické vlastnosti - hlavní směry, osy, vrcholy, ohniska, řídicí přímku paraboly (v závislosti na typu KS)

c) Napište rovnice tečen vedených z bodu O ke kuželosečce c.

d) Bodem O veďte libovolnou sečnu kuželosečky c, která ji protne v bodech A a B. Dokažte, že součin vzdáleností $|OA|$ a $|OB|$ je konstantní a určete jeho hodnotu.

19. V $\mathbb{E}^2$ je dána kuželosečka $c : 5x^2 - 4xy + 8y^2 - 16x - 8y - 16 = 0$ a body $O = [0, 0], P = [4, 2]$.

a) Převeďte rovnici c do homogenních souřadnic v $\mathbb{RP}^2$.

b) Klasifikujte kuželosečku c, t.j. určete:

- projektivní vlastnosti - singulární/ regulární + singulární body, reálná/ formálně reálná
- afinní vlastnosti - typ kuželosečky, středová/ nestředová + střed, asymptotické směry + asymptoty
- metrické vlastnosti - hlavní směry, osy, vrcholy, ohniska, řídicí přímku paraboly (v závislosti na typu KS)

c) Napište rovnice polár bodů O, P vzhledem ke kuželosečce c a určete jejich průsečík.

d) Určete průsečíky kuželosečky s osami x a y v $\mathbb{E}^2$ a ověřte zda tvoří tečnový čtyřúhelník.

20. V $\mathbb{E}^2$ je dána kuželosečka $c : -7x^2 + 18xy - 7y^2 + 30x - 34y - 23 = 0$ a body $P = [4, 5]$.

a) Převeďte rovnici c do homogenních souřadnic v $\mathbb{RP}^2$.

b) Klasifikujte kuželosečku c, t.j. určete:

- projektivní vlastnosti - singulární/ regulární + singulární body, reálná/ formálně reálná
- afinní vlastnosti - typ kuželosečky, středová/ nestředová + střed, asymptotické směry + asymptoty
- metrické vlastnosti - hlavní směry, osy, vrcholy, ohniska, řídicí přímku paraboly (v závislosti na typu KS)

c) Napište rovnice poláry p a tečen t_1, t_2 z bodu P ke kuželosečce c

d) Napište rovnici združeného průměru k průměru, který prochází bodem (0,1,0).