

Planimetrie

Kolineace

Michal Zamboj

Pedagogická fakulta

2024

`www.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/`

Incidence je základní vztah - nedefinujeme ji.

Bod **leží na** přímce = Přímka **prochází** bodem = Bod **je incidentní** s přímkou.

Definice

Body, které jsou incidentní s jednou přímkou nazýváme *kolineární*.

Přímky, které jsou incidentní s jedním bodem nazýváme *konkurentní*.

Incidenční (polohové) vlastnosti bodů a přímek

Každými dvěma různými body lze proložit přímkou.

Definice (Klasifikace přímek podle incidence)

Dvě přímky jsou vzájemně

totožné, když mají společné **všechny** body

různoběžné, když mají společný **právě jeden** bod

rovnoběžné, když nejsou různoběžné ani totožné (resp. nemají společný **žádný** bod)

Mezi je základní vztah - nedefinujeme ho.

Uspořádání bodů na přímce: Bod B leží na přímce mezi body A a C a zároveň mezi body C a A .

Definice (Úsečka, orientovaná úsečka)

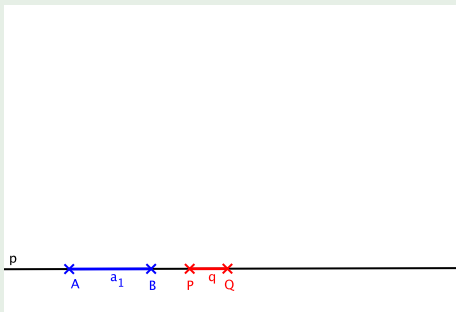
Množina všech bodů, které leží na přímce **mezi** body A a B včetně A, B nazýváme *úsečka* $\overline{AB}$. Body A a B nazýváme *krajní*.

Volbou počátečního bodu A a koncového bodu B úsečky $\overline{AB}$ dostaneme *orientovanou úsečku* $\overrightarrow{AB}$.

Sčítání a odečítání úseček

Úsečky na přímce můžeme synteticky sčítat, odečítat, násobit a dělit daným číslem.

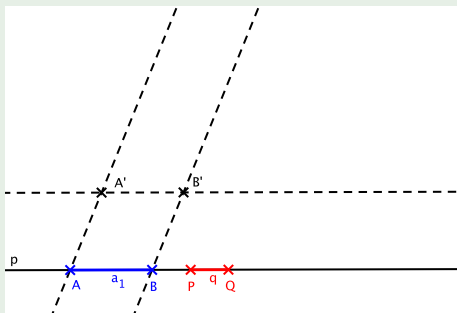
Konstrukce (Sčítání úseček)



Sčítání a odečítání úseček

Úsečky na přímce můžeme synteticky sčítat, odečítat, násobit a dělit daným číslem.

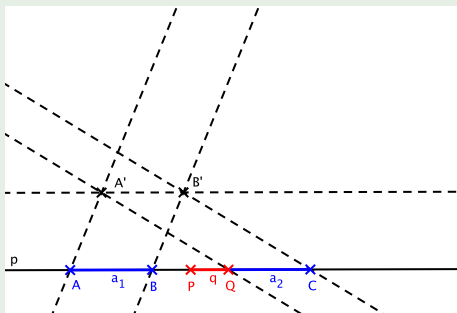
Konstrukce (Sčítání úseček)



Sčítání a odečítání úseček

Úsečky na přímce můžeme synteticky sčítat, odečítat, násobit a dělit daným číslem.

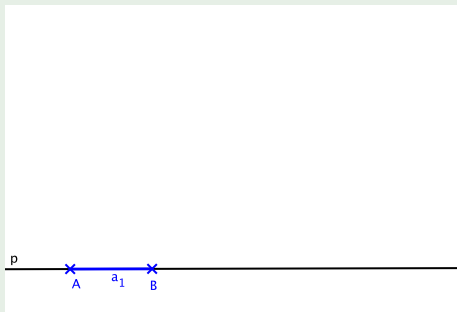
Konstrukce (Sčítání úseček)



Násobení úsečky číslem

Úsečky na přímce můžeme synteticky sčítat, odečítat, násobit a dělit daným číslem.

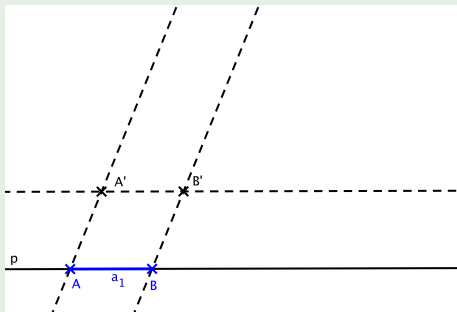
Konstrukce (Násobení úsečky číslem)



Násobení úsečky číslem

Úsečky na přímce můžeme synteticky sčítat, odečítat, násobit a dělit daným číslem.

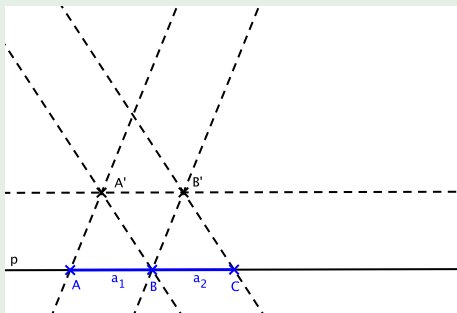
Konstrukce (Násobení úsečky číslem)



Násobení úsečky číslem

Úsečky na přímce můžeme synteticky sčítat, odečítat, násobit a dělit daným číslem.

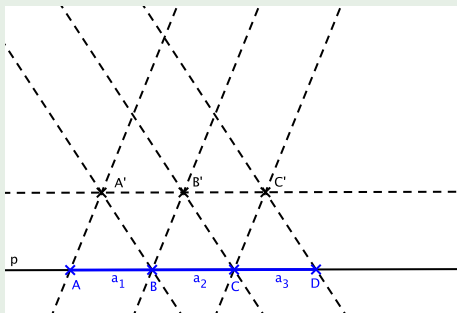
Konstrukce (Násobení úsečky číslem)



Násobení úsečky číslem

Úsečky na přímce můžeme synteticky sčítat, odečítat, násobit a dělit daným číslem.

Konstrukce (Násobení úsečky číslem)



Dělicí poměr

Definice (Dělicí poměr)

Nechť A, B, C jsou tři různé kolineární body. *Dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B* , je reálné číslo λ takové, že

$$\lambda \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Zn. $(AB; C)$ (v učebnici (ABC))

Věta (Vlastnosti dělicího poměru)

$\lambda \in (0; 1)$ pro bod C ležící vně úsečky $\overline{AB}$ za bodem A

$\lambda = 0$ pro $C = A$

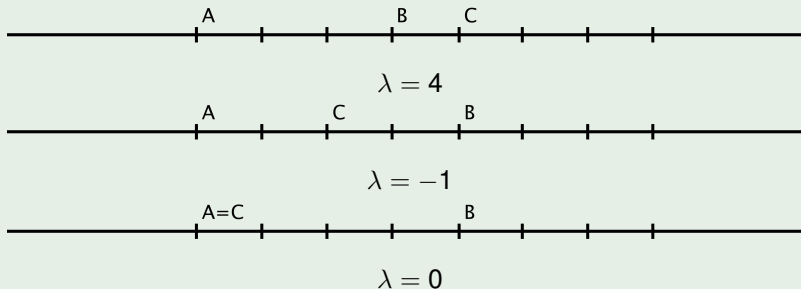
$\lambda < 0$ pro bod C ležící uvnitř úsečky $\overline{AB}$

λ neexistuje pro bod $C = B$

$\lambda > 1$ pro bod C ležící vně úsečky $\overline{AB}$ za bodem B

$\lambda \neq 1$

Příklad



Definice (Kolineace)

Zobrazení $k : \rho \rightarrow \rho$ nazýváme *kolineace*, když obrazy všech kolineárních bodů (kromě bodů, které se zobrazí do nekonečna) jsou kolineární.

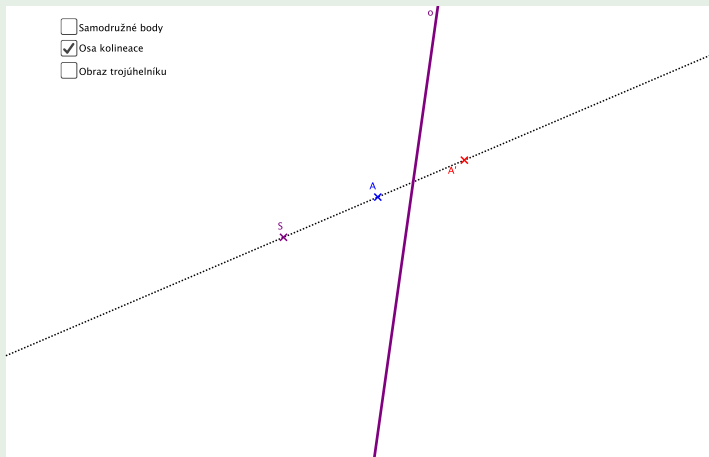
"Přímky se zobrazí na přímky."

Definice (Středová kolineace)

Středová kolineace je kolineace, která má přímku samodružných bodů o , nazýváme ji *osou kolineace* a samodružný bod $S \notin o$, který nazýváme *střed kolineace*. Body a jejich obrazy leží na přímkách procházejících středem S .

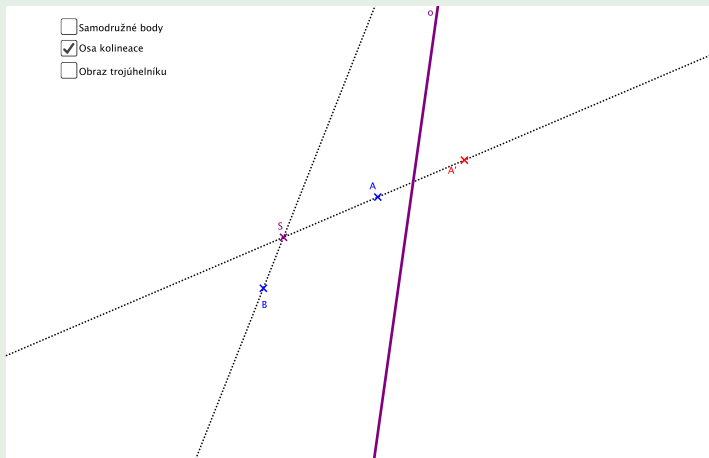
Příklad (Zadání středové kolineace: $S, o, A \rightarrow A'$)

- ☐ Samodružné body
- ☒ Osa kolineace
- ☐ Obraz trojúhelníku

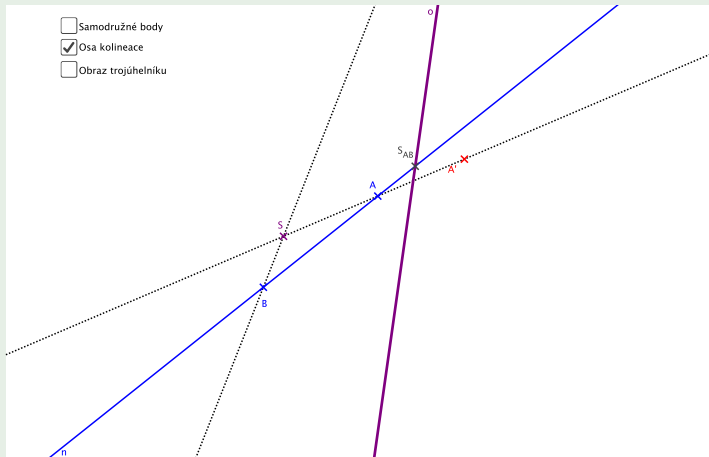


Příklad (Zadání středové kolineace: $S, o, A \rightarrow A'$)

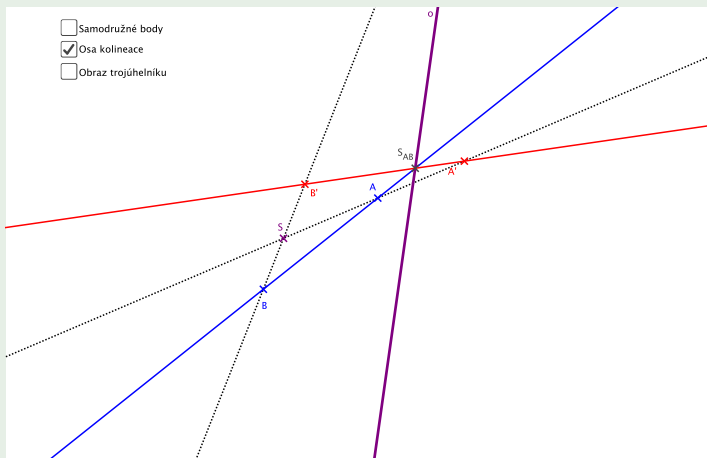
- ☐ Samodružné body
- ☒ Osa kolineace
- ☐ Obraz trojúhelníku



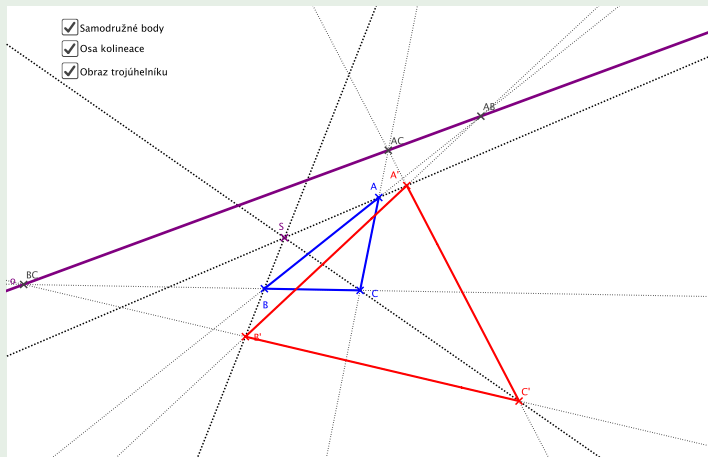
Příklad (Zadání středové kolineace: $S, o, A \rightarrow A'$)



Příklad (Zadání středové kolineace: $S, o, A \rightarrow A'$)



Příklad

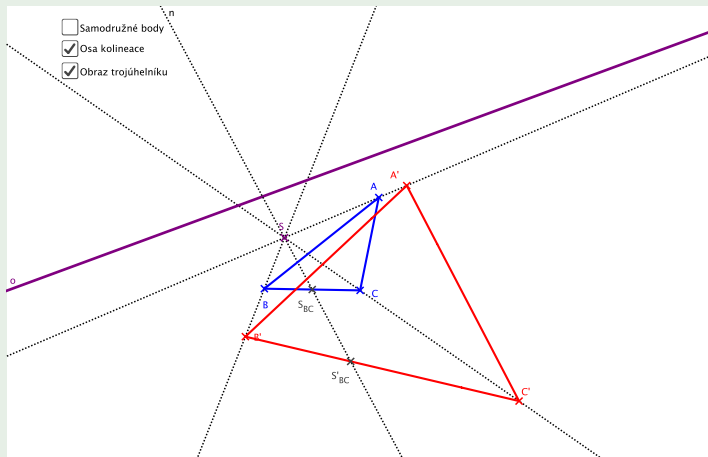


Věta (Vlastnosti kolineace)

Kolineace

- 1 zachovává incidenci.

Příklad

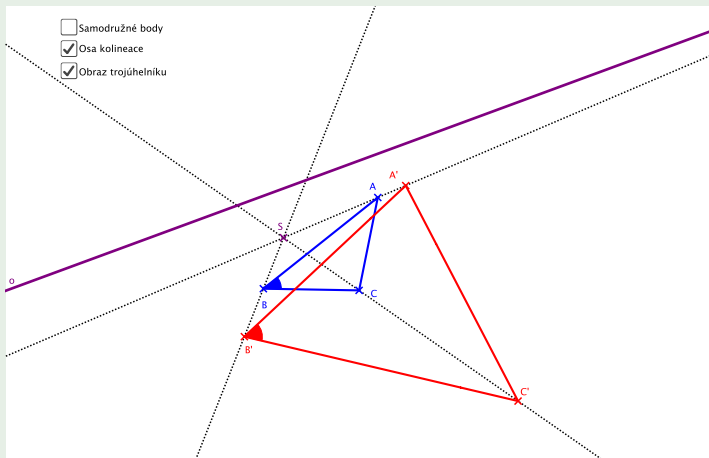


Věta (Vlastnosti kolineace)

Kolineace

- 1 zachovává incidenci.
- 2
- 3 NEzachovává středy úseček (a dělicí poměr).

Příklad



Věta (Vlastnosti kolineace)

Kolineace

- 1 zachovává incidenci.
- 2
- 3 NEzachovává středy úseček (a dělicí poměr).
- 4 NEzachovává velikosti úhlů.
- 5 NEzachovává délky úseček (a obsahy).

Pozor! Zatím "nevíme" co je to úhel a délka.

Dvojpoměr čtyř kolineárních bodů

Definice (Dvojpoměr)

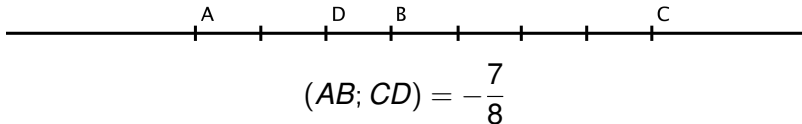
Nechť A, B, C, D jsou čtyři různé kolineární body. Číslo

$(AB; CD) = \frac{(AB; C)}{(AB; D)}$ se nazývá *dvojpoměr bodů* A, B, C, D (v tomto pořadí)

Věta („Vlastnosti“ dvojpoměru)

$(AB; CD) < 0$ pokud body C a D leží jeden uvnitř a jeden vně úsečky $\overline{AB}$

$(AB; CD) > 0$ pokud body C a D leží oba uvnitř nebo oba vně úsečky $\overline{AB}$

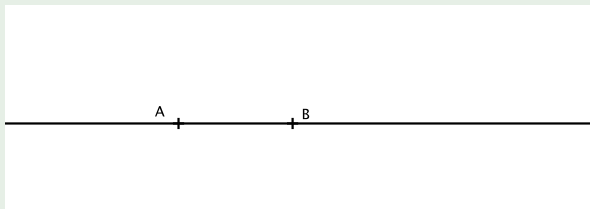


Dvojpoměr čtyř kolineárních bodů

Definice (Harmonická čtveřice)

Uspořádanou čtveřici bodů, pro které platí $(AB; CD) = -1$ nazýváme *harmonická čtveřice (čtveřina) bodů*.

Konstrukce (Dvojpoměr $(AB; CD) = -1$ (s použitím rovnoběžnosti))

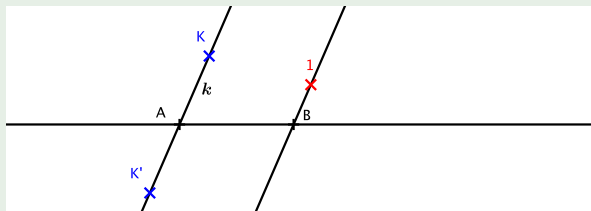


Dvojpoměr čtyř kolineárních bodů

Definice (Harmonická čtveřice)

Uspořádanou čtveřici bodů, pro které platí $(AB; CD) = -1$ nazýváme *harmonická čtveřice (čtveřina) bodů*.

Konstrukce (Dvojpoměr $(AB; CD) = -1$ (s použitím rovnoběžnosti))

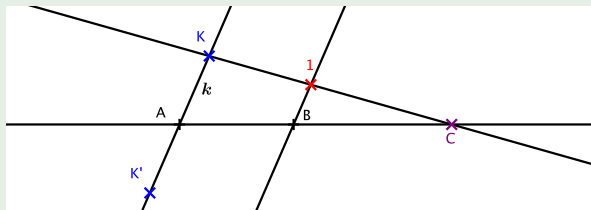


Dvojpoměr čtyř kolineárních bodů

Definice (Harmonická čtveřice)

Uspořádanou čtveřici bodů, pro které platí $(AB; CD) = -1$ nazýváme *harmonická čtveřice (čtveřina) bodů*.

Konstrukce (Dvojpoměr $(AB; CD) = -1$ (s použitím rovnoběžnosti))

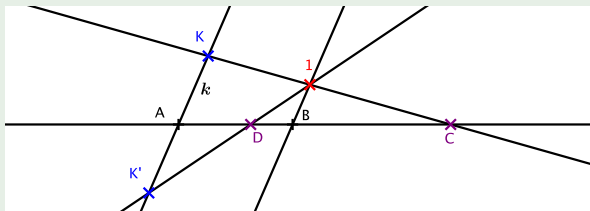


Dvojpoměr čtyř kolineárních bodů

Definice (Harmonická čtveřice)

Uspořádanou čtveřici bodů, pro které platí $(AB; CD) = -1$ nazýváme *harmonická čtveřice (čtveřina) bodů*.

Konstrukce (Dvojpoměr $(AB; CD) = -1$ (s použitím rovnoběžnosti))

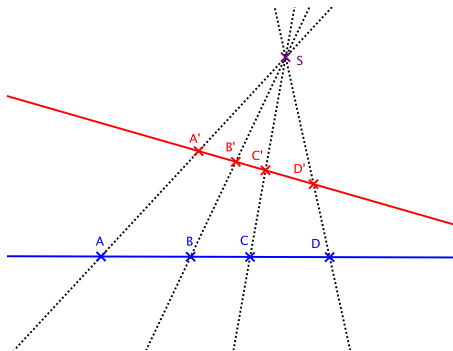


Dvojpoměr čtyř kolineárních bodů

Věta

Při kolineaci sa zachováva dvojpoměr.

$$(AB; CD) = \frac{(AB; C)}{(AB; D)} = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}} = \frac{\overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{B'D'}}{\overrightarrow{B'C'} \cdot \overrightarrow{A'D'}} = \frac{(A'B'; C')}{(A'B'; D')} = (A'B'; C'D')$$



Věta (Vlastnosti kolineace)

Kolineace

- 1 zachovává incidenci.
- 2 zachovává dvojpoměr.
- 3 NEzachovává středy úseček (a dělicí poměr).
- 4 NEzachovává velikosti úhlů.
- 5 NEzachovává délky úseček (a obsahy).

Dvojpoměr je *invariant* při kolineaci.

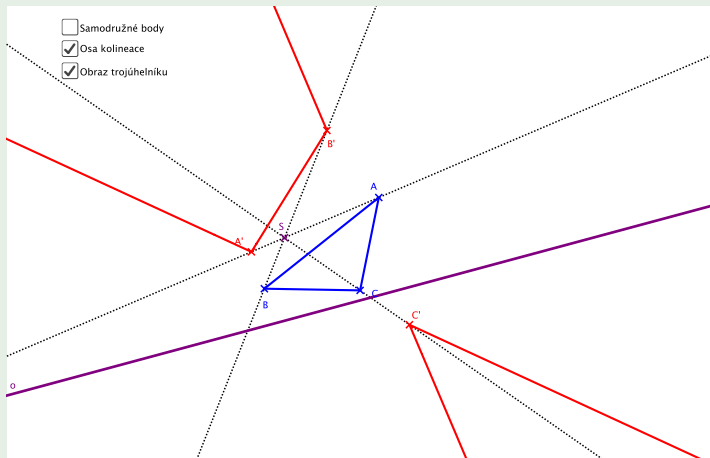
Definice ($\triangle$)

Trojúhelník je průnik tří polorovin určených třemi nekolineárními body A, B, C tak, že ke každým dvěma bodům vybíráme polorovinu, do které náleží třetí bod.

Body A, B, C nazýváme *vrcholy* $\triangle$.

Úsečky $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ nazýváme *strany* $\triangle$.

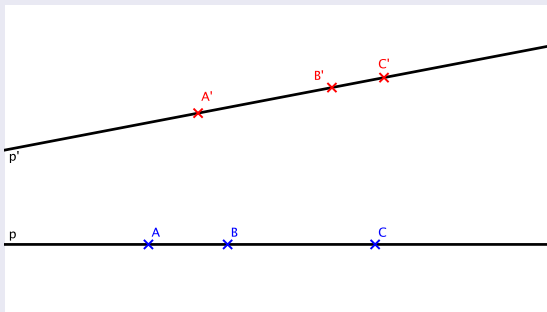
Příklad



Pappova věta

Věta (Pappova)

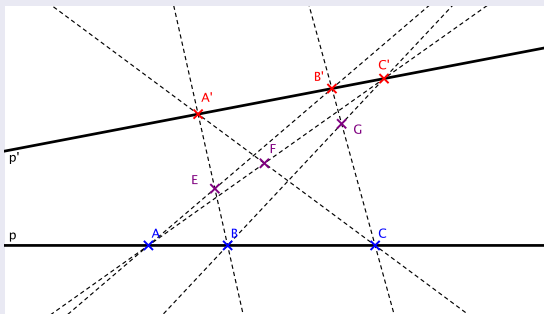
Nechť A, B, C jsou tři body na přímce p a A', B', C' jsou tři body na přímce p' , potom jestli existují průsečíky $AB' \cap BA'$, $AC' \cap CA'$, $BC' \cap CB'$, tak jsou taky kolineární.



Pappova věta

Věta (Pappova)

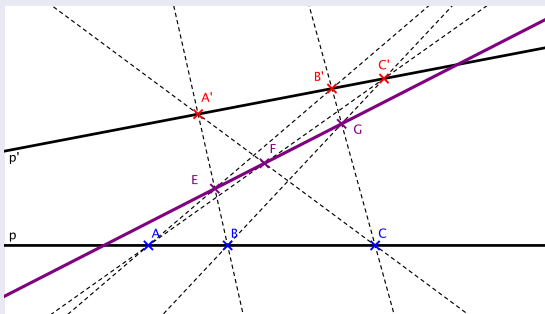
Nechť A, B, C jsou tři body na přímce p a A', B', C' jsou tři body na přímce p' , potom jestli existují průsečíky $AB' \cap BA', AC' \cap CA', BC' \cap CB'$, tak jsou taky kolineární.



Pappova věta

Věta (Pappova)

Nechť A, B, C jsou tři body na přímce p a A', B', C' jsou tři body na přímce p' , potom jestli existují průsečíky $AB' \cap BA', AC' \cap CA', BC' \cap CB'$, tak jsou taky kolineární.



Desarguesova věta

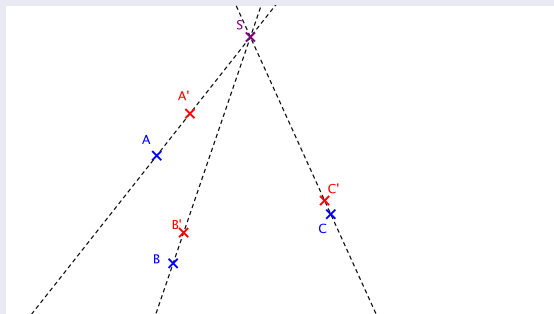
Girard Desargues (1591-1661)



Desarguesova věta

Věta (Desarguesova)

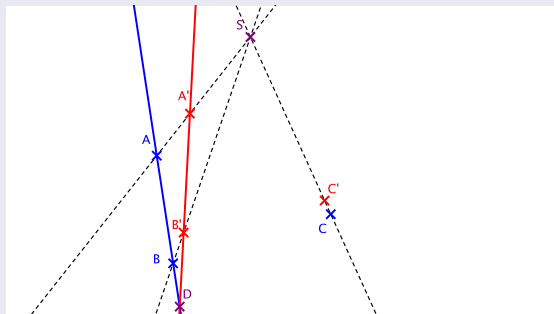
Nechť $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ jsou tři konkurentní nebo rovnoběžné přímky, pak jestli existují průsečíky $AB \cap A'B'$, $AC \cap A'C'$, $BC \cap B'C'$, tak jsou kolineární.



Desarguesova věta

Věta (Desarguesova)

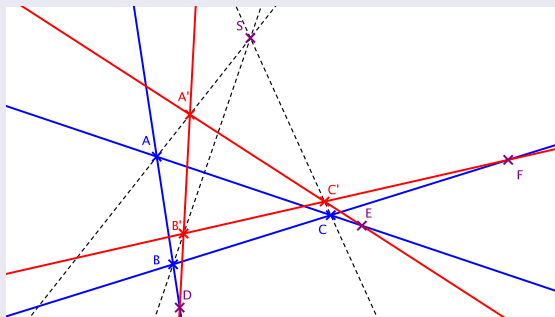
Nechť $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ jsou tři konkurentní nebo rovnoběžné přímky, pak jestli existují průsečíky $AB \cap A'B'$, $AC \cap A'C'$, $BC \cap B'C'$, tak jsou kolineární.



Desarguesova věta

Věta (Desarguesova)

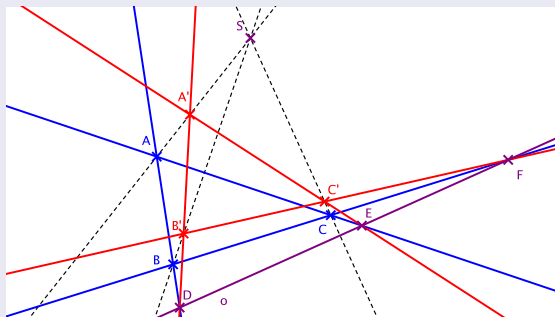
Necht' $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ jsou tři konkurentní nebo rovnoběžné přímky, pak jestli existují průsečíky $AB \cap A'B'$, $AC \cap A'C'$, $BC \cap B'C'$, tak jsou kolineární.



Desarguesova věta

Věta (Desarguesova)

Necht' $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ jsou tři konkurentní nebo rovnoběžné přímky, pak jestli existují průsečíky $AB \cap A'B'$, $AC \cap A'C'$, $BC \cap B'C'$, tak jsou kolineární.



Desarguesova věta

Věta (Desarguesova)

Necht' $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ jsou tři konkurentní nebo rovnoběžné přímky, pak jestli existují průsečíky $AB \cap A'B'$, $AC \cap A'C'$, $BC \cap B'C'$, tak jsou kolineární.

