Kuželosečky - doplňkový materiál k Syntetické Geometrii III

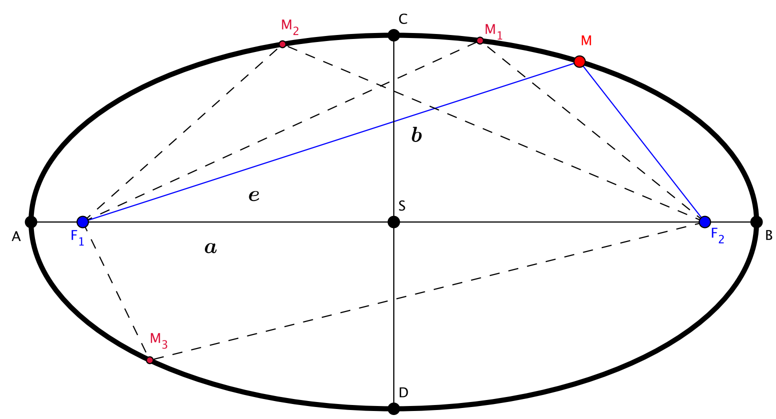
Literatura: Urban A.: Deskriptivní geometrie I, Praha: SNTL 1965

1 Elipsa

Ohnisková definice

Elipsa: Množina všech bodů, které mají od dvou pevných různých bodů (*ohnisek*) stálý součet vzdáleností větší než vzdálenost pevných bodů.
A, B - hlavní vrcholy; AB - hlavní osa, $|AS| = a$ - délka hlavní poloosy
C, D - vedlejší vrcholy; CD - vedlejší osa, $|CS| = b$ - délka vedlejší poloosy
$F_{1,2}$ - ohniska, $F_{1,2}M$ - průvodiče, $|F_1S| = e$ - excentricita

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a$$
$$|F_1F_2| < 2a$$



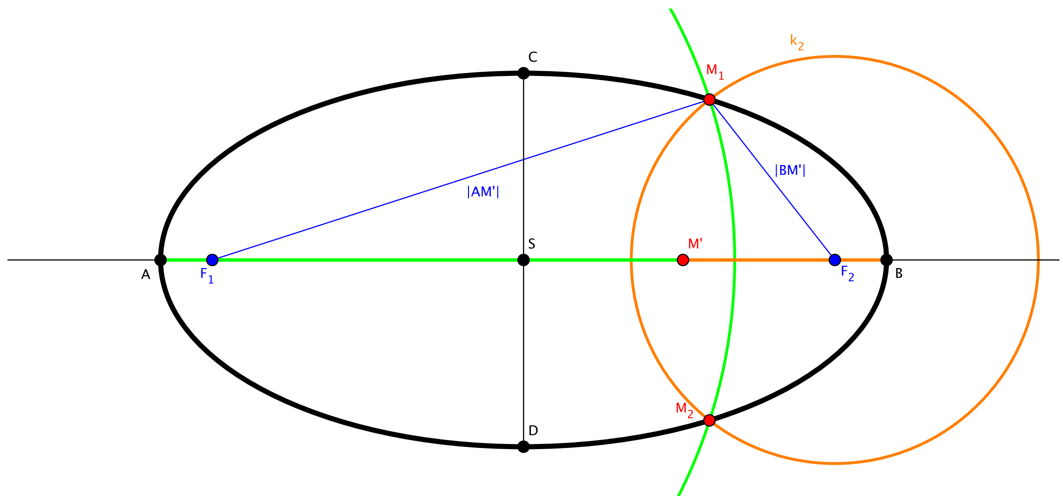
Zahradnická konstrukce

Bodová konstrukce: dáno F_1, F_2, a

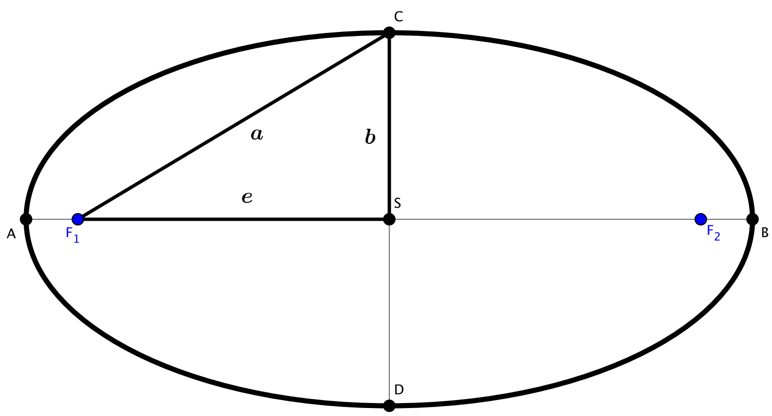
1) Zvol M' na $\overline{AB}$
2) $k_1(F_1, |AM'|)$; $k_2(F_2, |BM'|)$
3) $M_1, M_2 = k_1 \cap k_2$

Ohniskové vlastnosti

Platí: $a^2 - b^2 = e^2$ (přímo z $\triangle F_1SC$)



Bodová konstrukce



Ohniskové vlastnosti

Hyperoskulační kružnice

Hyperoskulační kružnice: dotykové kružnice ve vrcholech.
Konstrukce: dáno A, B, C, D

1) $t_1 \perp \overline{AB}; A \in t_1; t_2 \perp \overline{CD}; C \in t_2$

2) $E = t_1 \cap t_2$

3) $S_1 = s \cap \overline{AB}; S_2 = s \cap \overline{CD}$

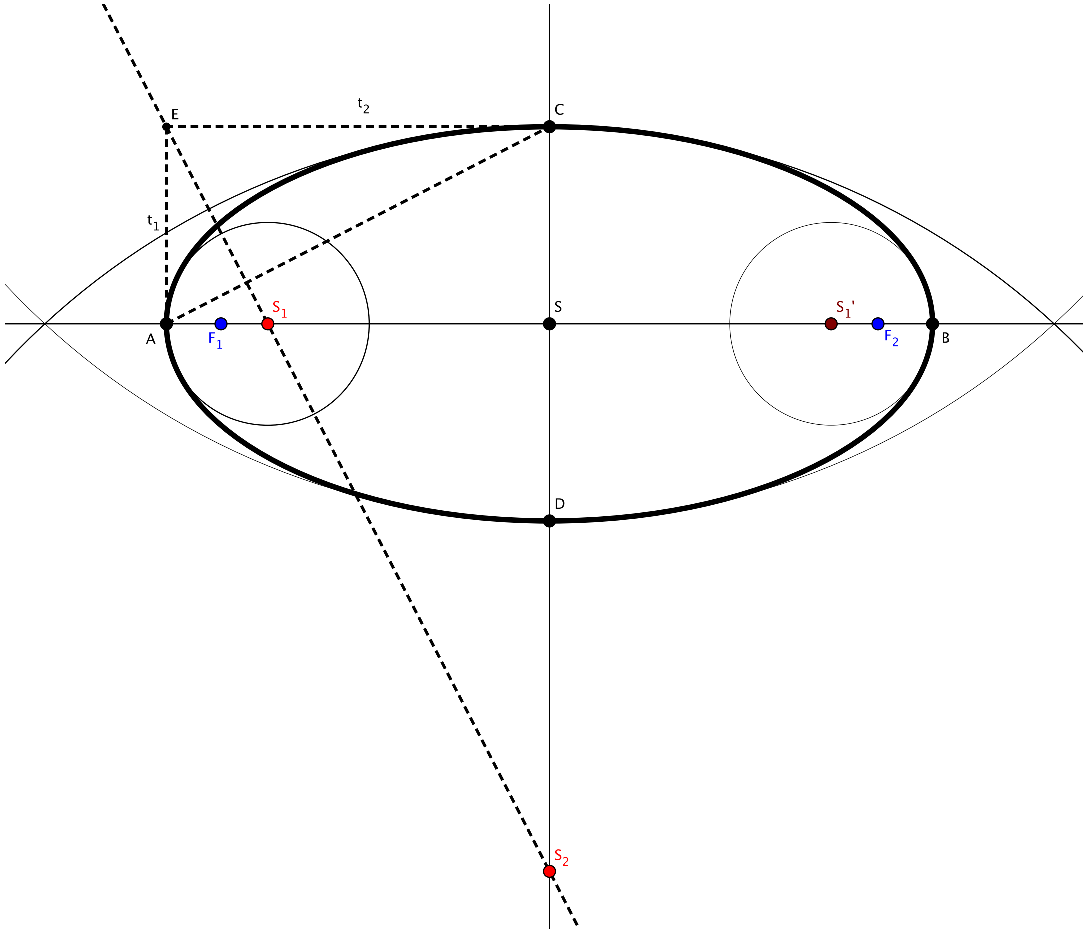
4) $k_1(S_1, |S_1A|); k_2(S_2, |S_2C|)$

- ! k_1, k_2 se neprotínají; vrcholy B, D osovo souměrně

Tečna elipsy

Věta 1.1 (Tečna elipsy)**.** *V každém bodě elipsy existuje právě jedna tečna; je to osa vnějších úhlů průvodičů.*

Důkaz (Jen existence)**.** *Na ose úhlů průvodičů volíme Q - souměrně združený s F_2. Pro každý bod R na ose platí $RF_1 + RQ > 2a; \triangle \neq$, kromě bodu M, pro který platí rovnost $|F_1M| + |QM| = 2a$ a leži na elipse. Osa průvodičů tedy protne elipsu jenom v bodě dotyku M a v žádném jiném.*



Hyperoskulační kružnice

Věta 1.2 (Řídicí kružnice)**.** *Množina všech bodů souměrně sdružených s jedním ohniskem elipsy podle jejích tečen je kružnice se středem v druhém ohnisku o poloměru rovném velikosti hlavní osy elipsy.*
Zn. $g_1(F_1, 2a); g_2(F_2, 2a)$.

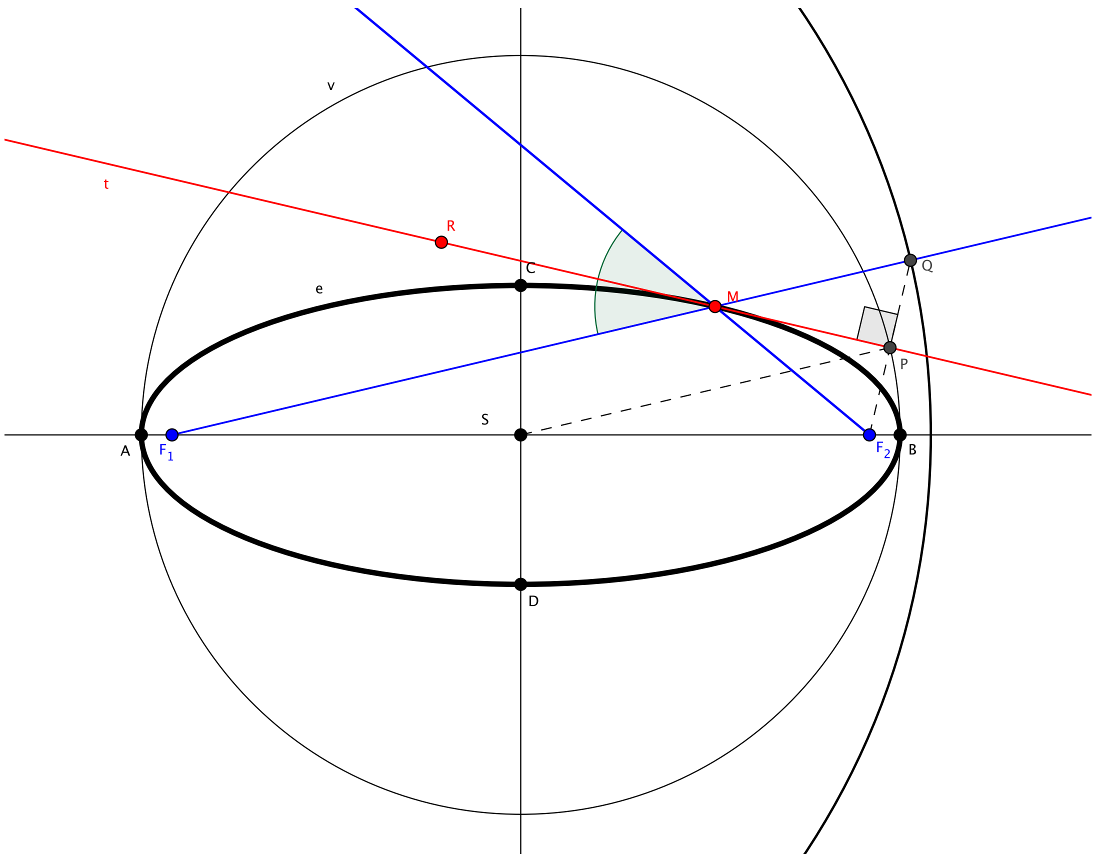
Důkaz. *1) Je-li* Q *souměrně sdružen s* F_2*, pak platí* $|F_1Q| = 2a$.
2) Leží-li bod Q *na kružnici* g_1 *pak osa* t *úsečky* F_2Q *protne* F_1Q *v jejím vnitřním bodě* $M : 2a = F_1M + QM = F_1M + F_2M$ *a* $M \in \epsilon$*. Osa* t *je tečna.*

Věta 1.3 (Vrcholová kružnice)**.** *Množina všech pat kolmic vedených z ohnisek elipsy k jejím tečnám je kružnice opsaná kolem středu elipsy s poloměrem rovným velikosti hlavní poloosy.*
Zn. $v(S, a)$.

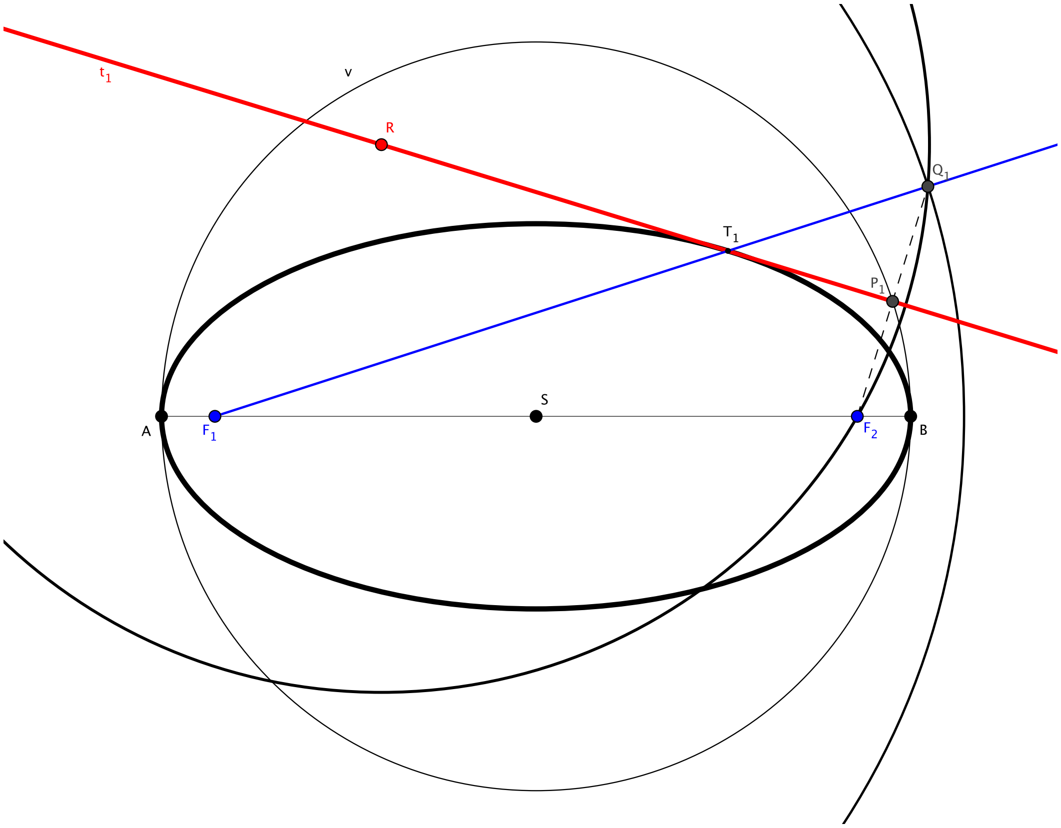
Důkaz. *1) Nechť* P *je taková pata kolmice. Pak* SP *je střední příčka v* $\triangle F_1F_2Q$ *a* $|SP| = \frac{1}{2}|F_1Q|$.
2) Nechť $P \in v(S, a)$*. Sestrojíme* Q*, t.ž.* P *je střed* F_2Q*. Z* $\triangle F_1F_2Q$ *je díky podobnosti s* $\triangle SF_2P$ *délka* $F_1Q = 2a$ *a* Q *leží na řídicí kružnici. Z předchozí věty plyne, že osa* F_2Q *je tečna a* P *je tedy pata kolmice.*

Tečna daným bodem: dáno a, F_1, F_2, R

1) $k(R, |RF_2|); k \cap g_1 = Q_1, Q_2$
2) $P_1, P_2; \overline{RP_1} = t_1; \overline{RP_2} = t_2$
3) dourčení bodů dotyku $t_1 \cap F_1Q_1 = T_1, t_2 \cap F_1Q_2 = T_2$



Tečna elipsy



Tečna t_1 bodem R

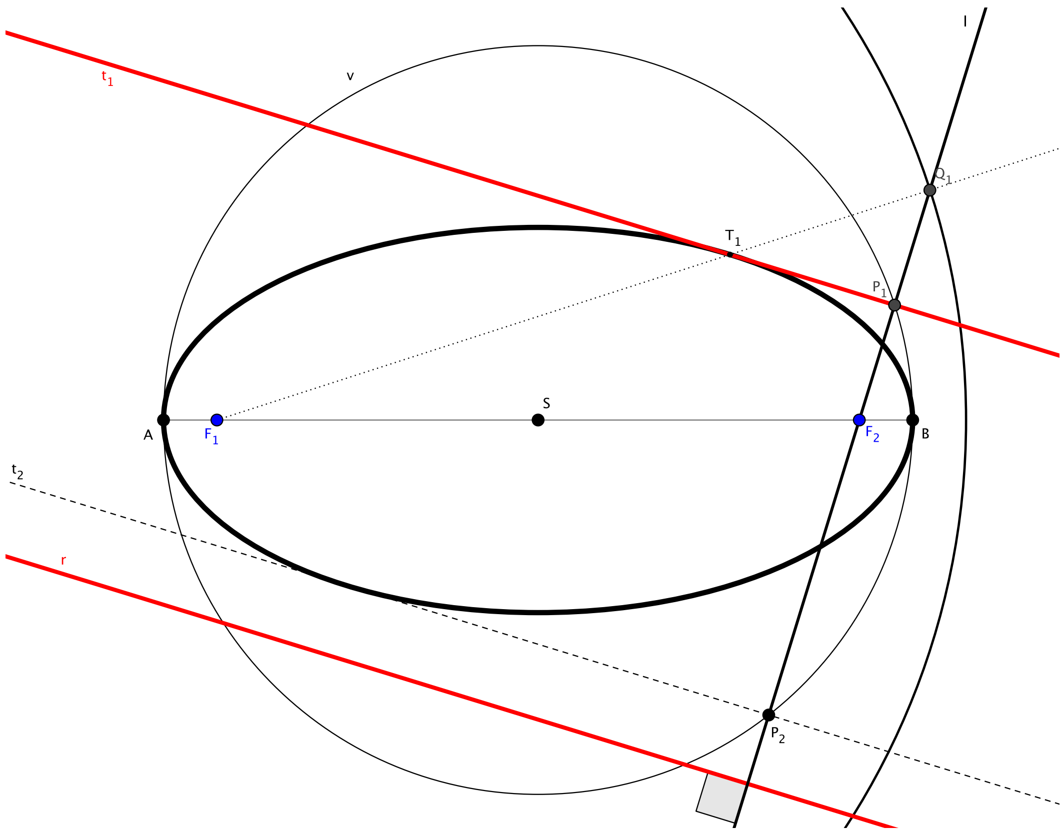
Tečna daným směrem: dáno a, F_1, F_2, r (r je rovnoběžka s tečnou)

1) $l \perp r; F_2 \in l$

2) $v; l \cap v = P_1; P_2$

3) $t_1, t_2 || r; P_1 \in t_1; p_2 \in t_2$

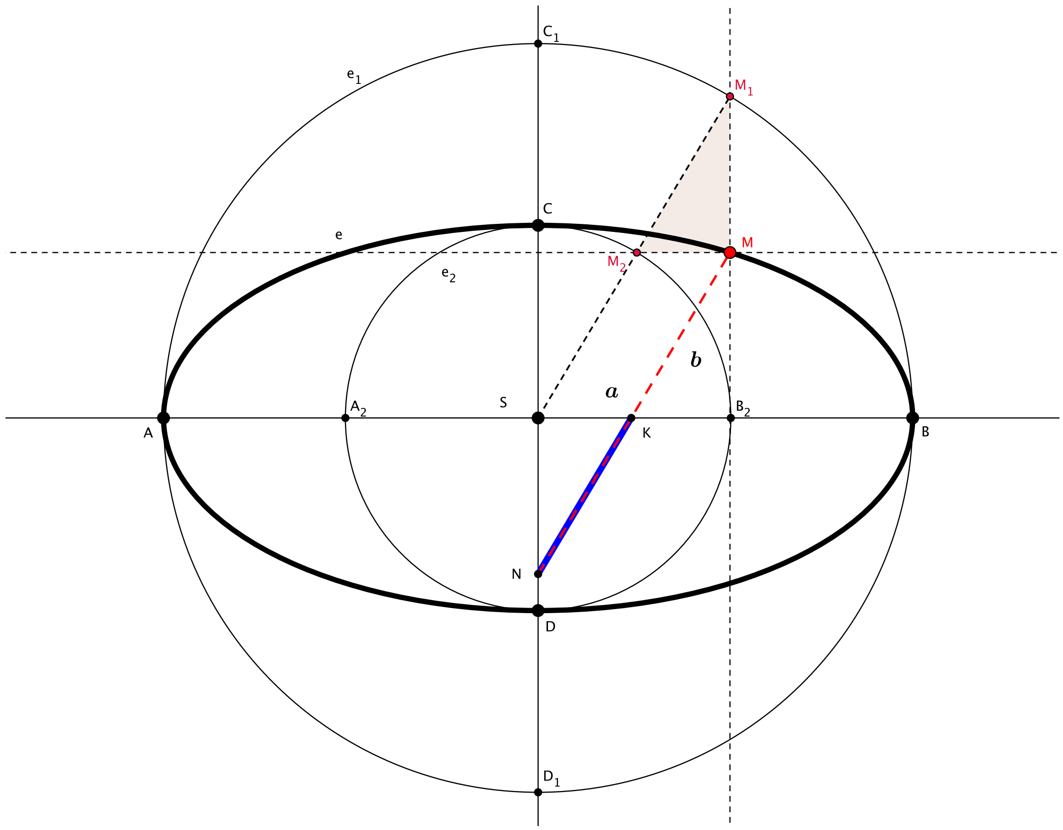
4) dourčení bodů dotyku pomocí řídicích kružnic



Tečny směrem r

Kružnice v afinitě

Kružnice sa v osové afinitě zobrazí na elipsu (bez důkazu).



$\triangle$ a proužková konstrukce

Speciální případ: volíme 2 afinity

$\mathcal{A}_1 : e \to e_1$; $\mathcal{A}_2 : e \to e_2$

$\mathcal{A}_1$: osa - $\overline{AB}$, směr - $\overline{CD}, C \to C_1, D \to D_1, M \to M_1$

$\mathcal{A}_2$: osa - $\overline{CD}$, směr - $\overline{AB}, A \to A_2, B \to B_2, M \to M_2$

Trojúhelníková konstrukce: dáno A, B, C, D

1) Volíme $M_1 \in e_1$ a dourčíme $M_2 \in e_2$. Bod $M \in e$ leží na paprscích ve směru afinit $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$.

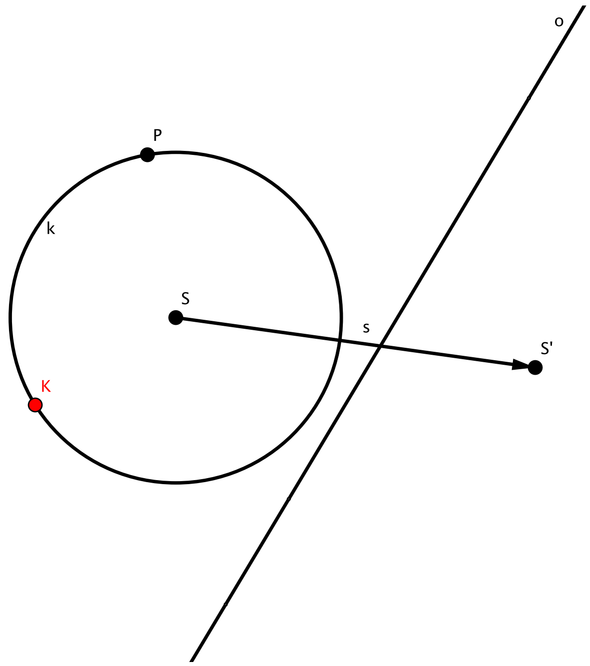
Proužková (rozdílová) konstrukce: dáno A, B, M; M - bod elipsy

1) vedlejší osa b

2) $k(M, a) \cap b = N$

3) $\overline{MN} \cap \overline{AB} = K; |KM| = b$

Plyne z podobností, které vznikají v afinitách $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$.



Zobrazte kružnici k v afinitě o, s

Rytzova konstrukce: dáno $\overline{KL}, \overline{MN}$ - sdružené průměry (2 na sebe kolmé průměry kružnice v prostoru, afinitě)

1) $c \perp \overline{KL}; S \in c; k(S, |SK|), \overline{KL}$ je delší průměr
2) $k \cap c = M'; O \in \overline{MM'}; |OM| = |OM'|$
3) $l(O, |OS|); I, J = l \cap \overline{MM'}$
4) $\overline{SI}, \overline{SJ}$ osy elipsy; hlavní osa je v menším úhlu sdružených průměrů; $a = |MJ|; b = |MI|$

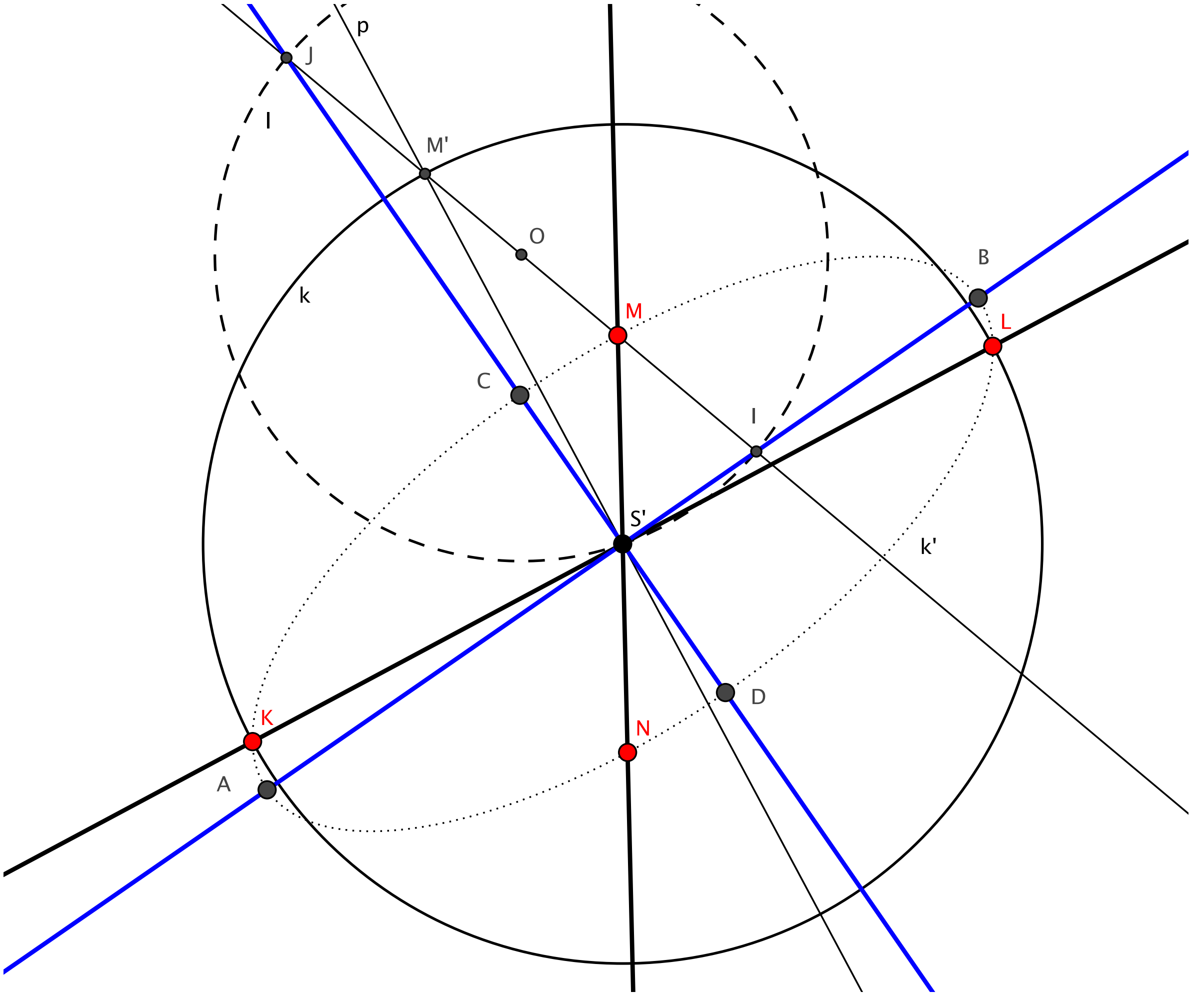
Průsečík přímky s elipsou: Je dána elipsa svými osami a přímka p. Určete polohu prímky a elipsy, případné průsečíky sestrojte.
návod k řešení: užijte kolmou afinitu - $A = A', B = B', |S'C'| = a$

2 Hyperbola

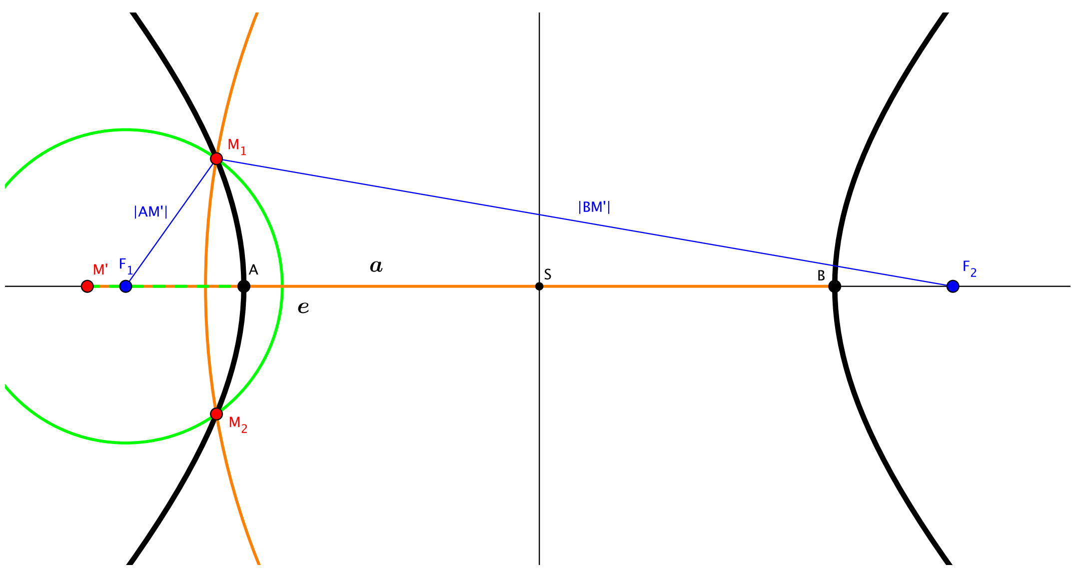
Ohnisková definice

Hyperbola: Množina všech bodů, které mají od dvou pevných různých bodů (*ohnisek*) stálý kladný rozdíl vzdáleností větší než vzdálenost pevných bodů.
A, B - hlavní vrcholy; AB - hlavní osa, $|AS| = a$ - délka hlavní poloosy
S - střed hyperboly, kolmice na hlavní osu přes S - vedlejší osa
$F_{1,2}$ - ohniska, $F_{1,2}M$ - průvodiče, $|F_1S| = e$ - excentricita

$$||F_1M| - |F_2M|| = 2a$$
$$|F_1F_2| > 2a$$



Rytzova konstrukce

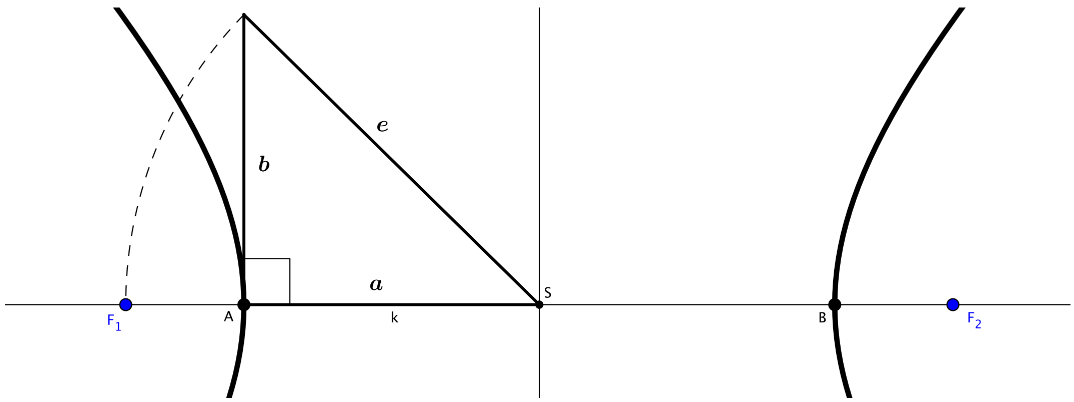


Bodová konstrukce

Bodová konstrukce: dáno F_1, F_2, a

1) Zvol M' na $\overline{AB}$ vně úsečky AB
2) $k_1(F_1, |AM'|)$; $k_2(F_2, |BM'|)$
3) $M_1, M_2 = k_1 \cap k_2$

Ohniskové vlastnosti



Ohniskové vlastnosti

Platí: $e^2 - a^2 = b^2$
b - délka vedlejší poloosy

Tečna hyperboly

Věta 2.1 (Tečna hyperboly)**.** *V každém bodě hyperboly existuje právě jedna tečna; je to osa vnějších úhlů průvodičů.*

Důkaz (Existence)**.** *stejně jako u elipsy*

Věta 2.2 (Řídicí kružnice)**.** *Množina všech bodů souměrně sdružených s jedním ohniskem hyperboly podle jejích tečen je kružnice se středem v druhém ohnisku o poloměru rovném velikosti hlavní osy hyperboly.*
Zn. $g_1(F_1, 2a); g_2(F_2, 2a)$.

Důkaz. *podobně jako u elipsy*

Asymptoty: Přímky u_1, u_2 procházejíci středem. u_1 kolmá na tečnu vedenou z ohniska F_2 ke g_1.
Taky: Tečna v nevlastním bodě (bodě v nekonečnu). Hyperbola má tudíž dva nevlastní body!

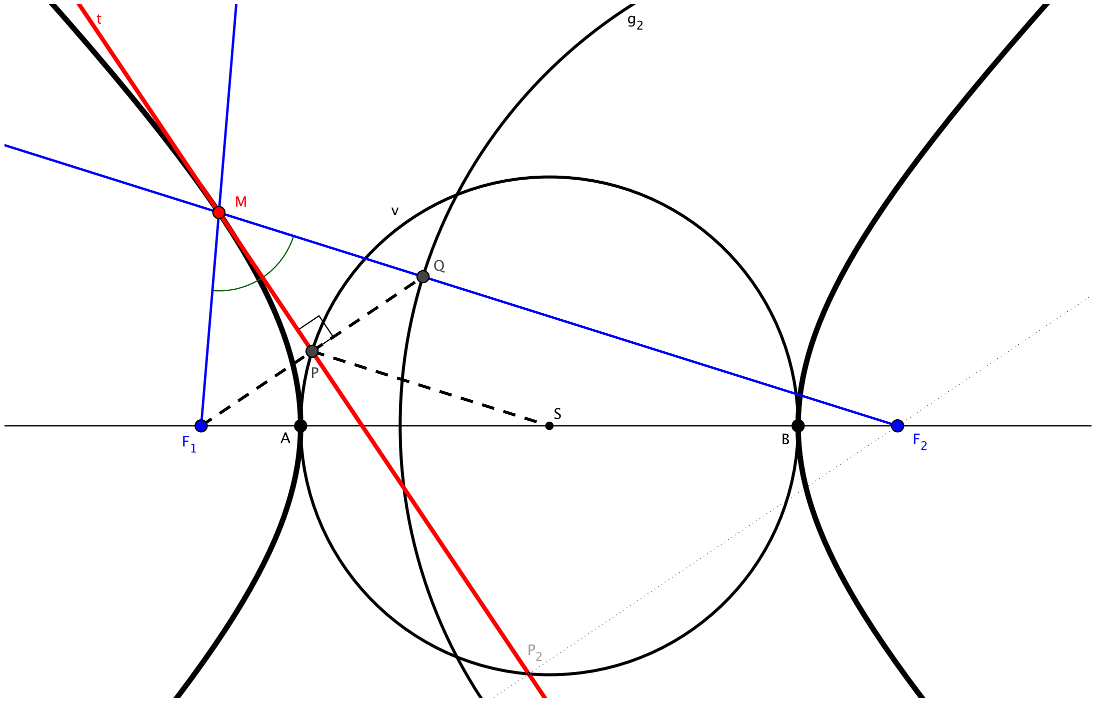
Věta 2.3 (Vrcholová kružnice)**.** *Množina všech pat kolmic vedených z ohnisek hyperboly k jejím tečnám je kružnice opsaná kolem středu hyperboly s poloměrem rovným velikosti hlavní poloosy.*
Zn. $v(S, a)$.

Důkaz. *podobně jako u elipsy*

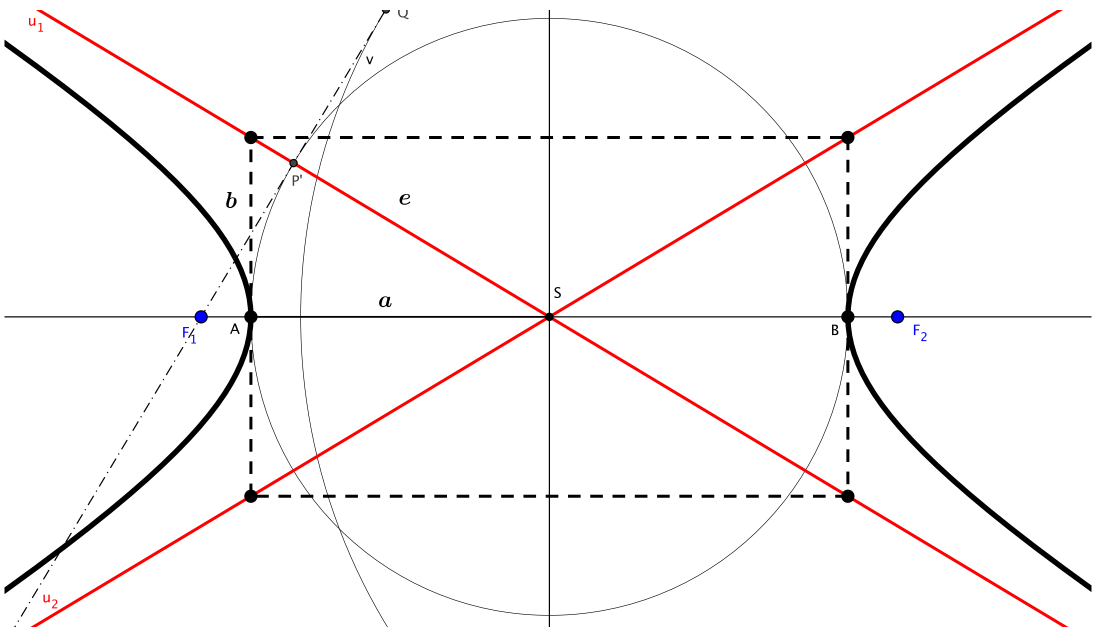
Důsledek asymptoty jsou kolmé na tečny vedené z ohnisek k vrcholové kružnici.

Tečna daným bodem: dáno a, F_1, F_2, R

1) $k(R, |RF_1|); k \cap g_2 = Q_2, Q_1$
2) $P_1, P_2; \overline{RP_1} = t_1; \overline{RP_2} = t_2$
3) dourčení bodů dotyku $t_1 \cap F_2Q_2 = T_2, t_2 \cap F_2Q_1 = T_1$



Tečna hyperboly



Asymptoty hyperboly

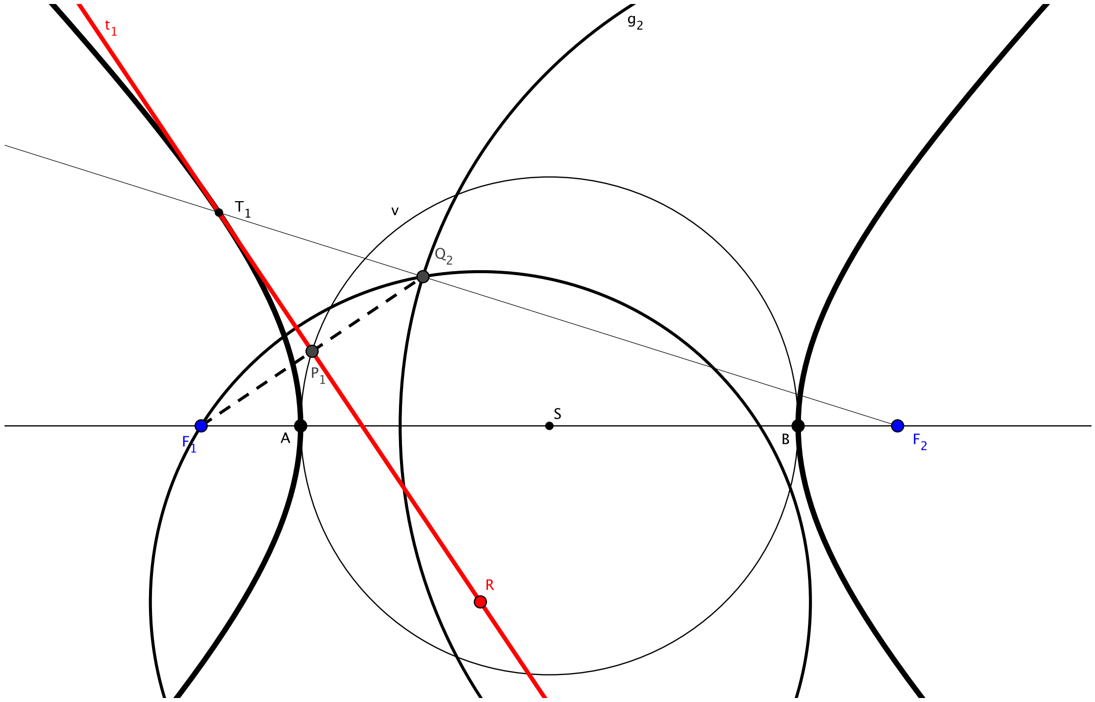
Tečna daným směrem: dáno a, F_1, F_2, r (r je rovnoběžka s tečnou)

1) $l \perp r; F_2 \in l$

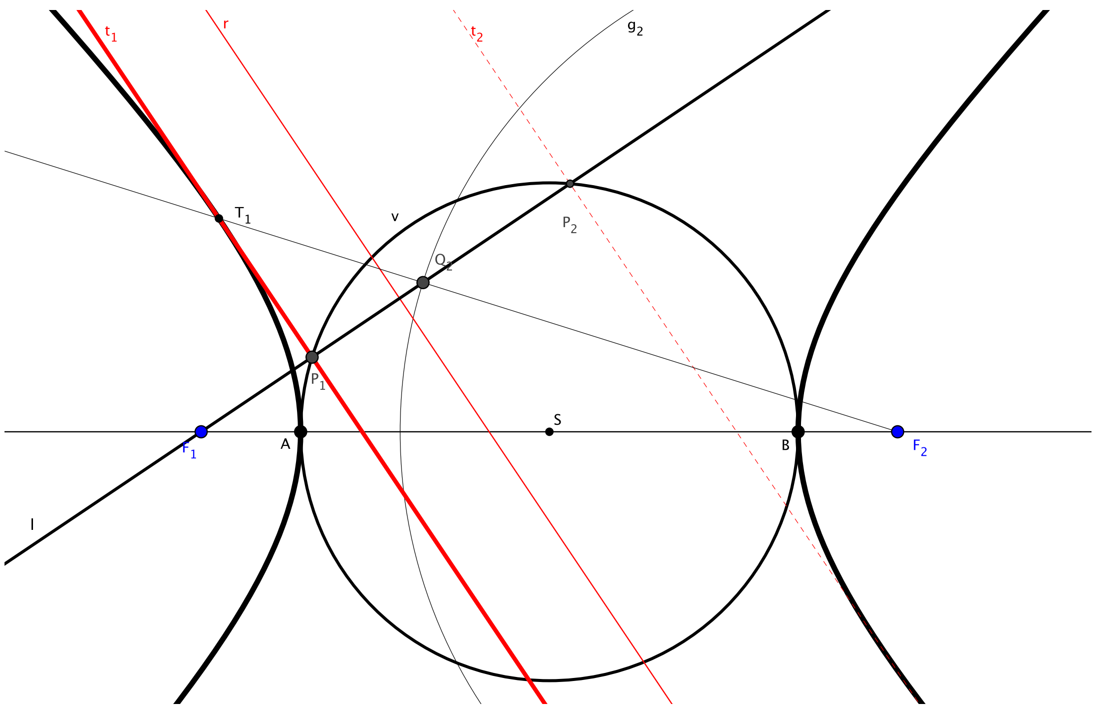
2) $v; l \cap v = P_1; P_2$

3) $t_1, t_2 || r; P_1 \in t_1; p_2 \in t_2$

4) dourčení bodů dotyku pomocí řídicích kružnic



Tečna t_1 bodem R



Tečny směrem r

3 Parabola

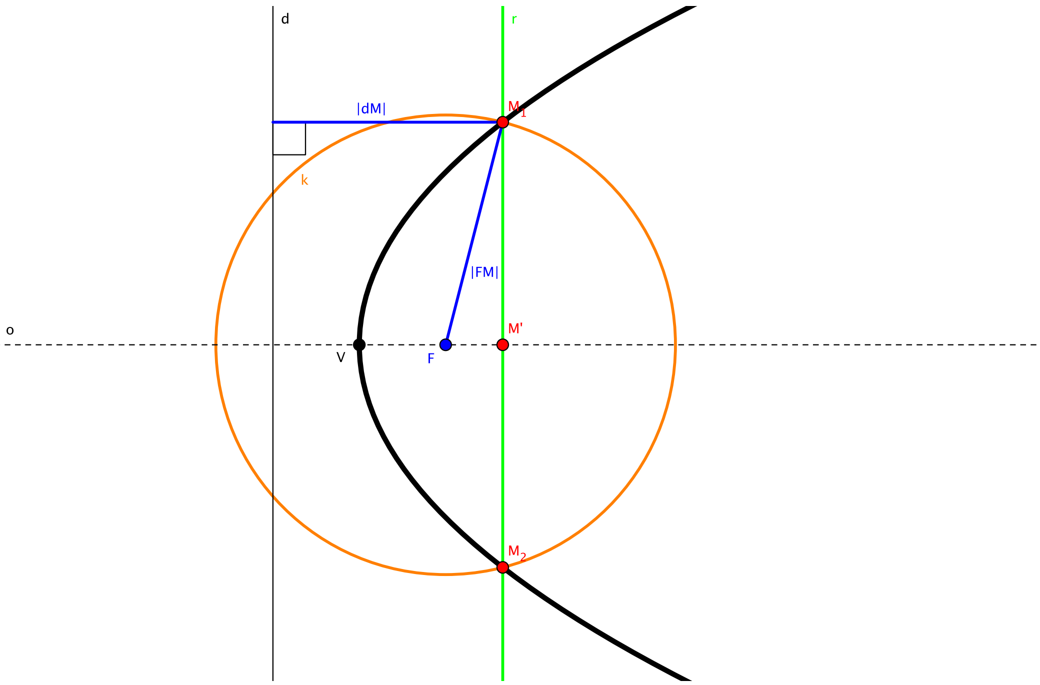
Ohnisková definice

Parabola: Množina všech bodů, které mají od pevného bodu (ohniska) a pevné přímky (řídicí přímky), která tímto bodem neprochází, stejné vzdálenosti.

V - vrchol, o- osa, F-ohnisko, d- řídicí přímka, $|Fd|$- parametr, $\overline{FM}$ a kolmice na d procházející M - průvodiče

$$|Md| = |FM|$$

Bodová konstrukce: dáno F, d



Bodová konstrukce

1) Zvol M' na o; $|dM'| \leq |FM'|$
2) $k(F, |dM'|)$
3) $r \| d; |rd| = |dM'|$
4) $M_1, M_2 = k \cap r$

Hyperoskulační kružnice: dotyková kružnice ve vrchole.
Konstrukce: dáno d, F, o

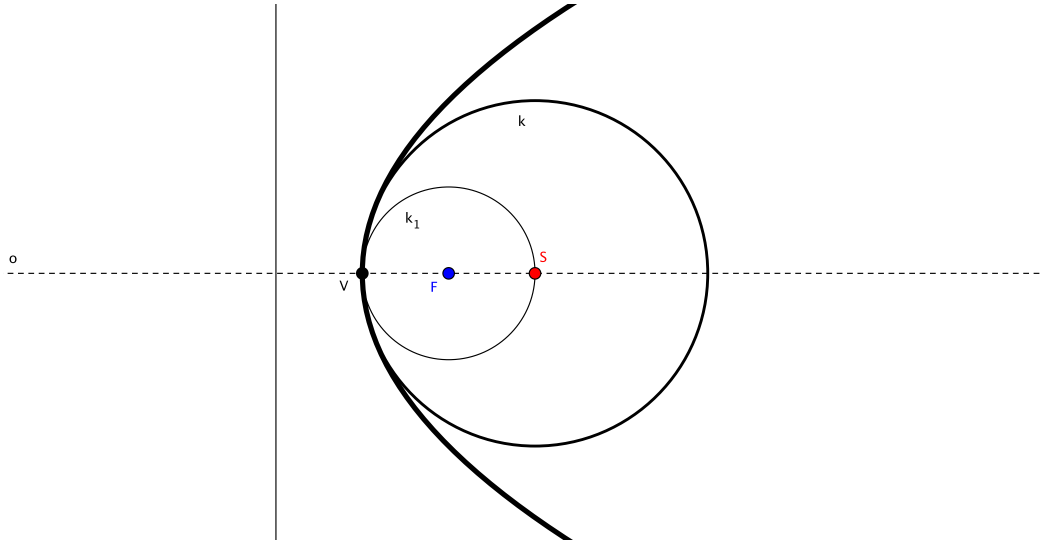
1) $k_1\left(F, \dfrac{p}{2}\right)$
2) $S = k_1 \cap o; S \neq V$
3) $k(S, p)$

Tečna paraboly

Věta 3.1 (Tečna paraboly)**.** *V každém bodě hyperboly existuje právě jedna tečna; je to osa vnějších úhlů průvodičů.*

Důkaz (Existence)**.** *stejně jako u elipsy*

Věta 3.2 (Řídicí přímka)**.** *Množina všech bodů souměrně sdružených s ohniskem paraboly podle tečen paraboly je její řídicí přímka.*

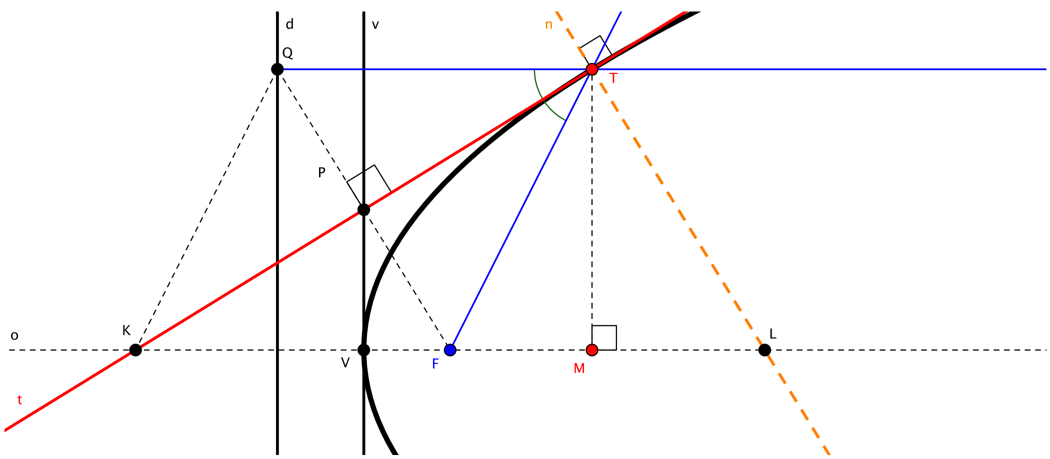


Hyperoskulační kružnice

Důkaz. *podobně jako u elipsy*

Věta 3.3 (Vrcholová tečna)**.** *Množina všech pat kolmic spuštěných z ohniska na tečny paraboly je vrcholová tečna paraboly.*

Důkaz. *podobně jako u elipsy*



Tečna paraboly

Subtangenta a subnormála t - tečna, n - normála
T - bod dotyku, K - průsečík tečny s osou, L - průsečík normály k tečne v bodě T s osou, M - pata kolmice spuštěné z T na osu
$\overline{KM}$ - subtangenta, $\overline{ML}$ - subnormála
Platí:

- Subtangenta je půlená vrcholem
- Délka subnormály je konstantní a rovná p.
- Úsečka $\overline{KL}$ je půlená ohniskem

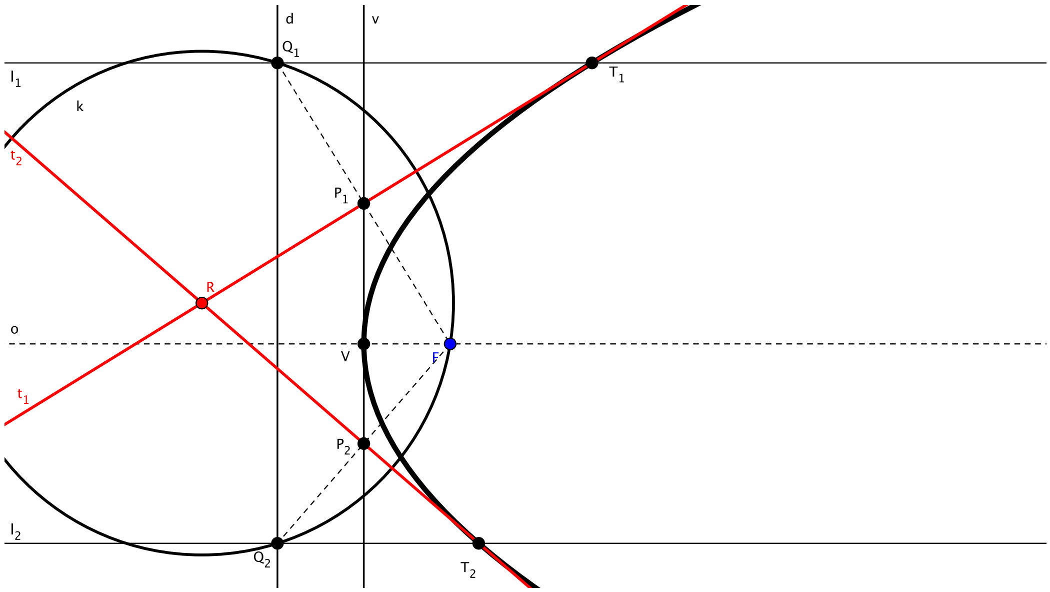
Tečna daným bodem: dáno d, F

1) $k(R, |RF|); k \cap d = Q_2, Q_1$

2) $P_1, P_2; \overline{RP_1} = t_1; \overline{RP_2} = t_2$

3) dourčení bodů dotyku $l_1 \perp d; Q_1 \in l_1$, $l_2 \perp d; Q_2 \in l_2$

4) $t_1 \cap l_1 = T_1, t_2 \cap l_2 = T_2$



Tečny bodem R

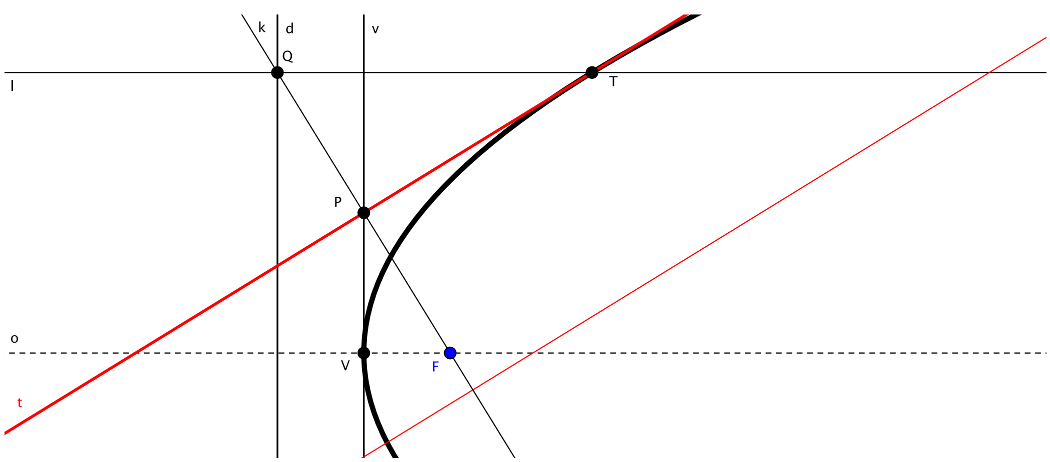
Tečna daným směrem: dáno d, F (r je rovnoběžka s tečnou)

1) $k \perp r; F \in k$

2) $v; l \cap v = P$

3) $t \| r; P \in t$

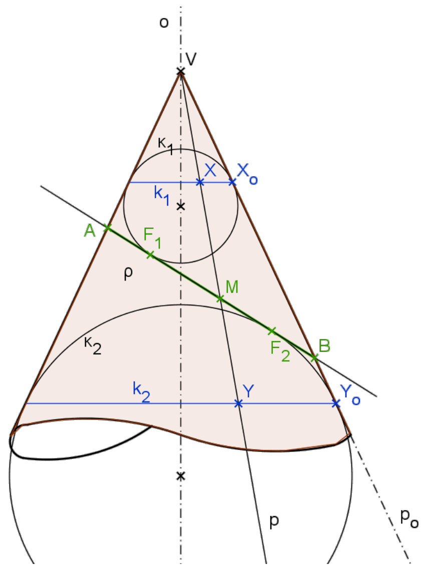
4) dourčení bodů dotyku pomocí řídicí přímky



Tečny směrem r

4 Quételet - Dandelinova věta

Věta 4.1 (QD). *Řezy rotační kuželové plochy rovinami, které nejsou vrcholové, jsou kuželosečky s ohnisky v dotykových bodech kulových ploch vepsaných kuželové ploše a dotýkajících se roviny řezu.*



Q-D věta pro eliptický řez

Důkaz. $\overline{MF_1}, \overline{MX}$ *jsou tečny sféry* $\kappa_1 \Rightarrow |MF_1| = |MX|$. *Stejně* $|MF_2| = |MY|$.
t.j. $|MF_1| + |MF_2| = |MX| + |MY| = |XY| = |X_0Y_0|$
$|X_0B| = |BF_1|; |Y_0B| = |BF_2| \Rightarrow |X_0B| + |Y_0B| = |BF_1| + |BF_2| = |AF_1| + |AF_2|$
$|AF_1| = |BF_2|$
$|X_0Y_0| = |X_0B| + |Y_0B| = |BF_1| + |AF_1| = |AB| = 2a$ *konstanta.*
Z ohniskové definice platí, že řezem je elipsa. podobně pro hyperbolu a parabolu a pro elipsu na válcové ploše.