Riešenie záverečného testu Varianta A, ZS 2014/2015

UPOZORNENIE: Priložené bodovanie sa vzťahuje na moje skupiny študentov, bodovanie jednotlivých cvičiacich sa môže a bude mierne líšiť.
V prípade, že odhalíte chybu/preklep (aj s odstupom), napíšte mi to prosím do mailu, môže to zachrániť zdravie iných.

1. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = e^{-x}(x-1)^3,$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitýh bodech), limity v krajních bodech Df , derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body, nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.

$D_f = \mathbb{R}$ (1 bod)

$f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x)$ porovnaním alebo dosadením nejakej hodnoty, napríklad aj z vypočítaných priesečníkov, $f(-1) = -8e, \pm f(1) = 0$. Funkcia teda nie je ani sudá ani lichá. (1 bod)

$P_x : f(x) = 0 = e^{-x}(x-1)^3 \Leftrightarrow x = 1; P_x[1, 0]$
$P_y : x = 0, f(0) = -1; P_y[0, -1]$ (1 bod)

znamienko funkcie: funkcia je na $(-\infty, 1)$ záporná, na $(1, \infty)$ kladná (1 bod)

$\lim_{x\to\infty} e^{-x}(x-1)^3 = 0$, buď výpočet L'Hospitalom, alebo aspoň odôvodniť, že e je rýchlejšie ako polynóm.
$\lim_{x\to-\infty} e^{-x}(x-1)^3 = \infty \cdot -\infty = -\infty$ (1 bod)

$f'(x) = e^{-x}(x-1)^2(4-x); D_{f'} = \mathbb{R}$ (1 bod)

nulové body derivácie: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$ (1 bod)

monotónnosť funkcie: $f'(x) > 0$ na $(-\infty, 1)$ a $(1, 4)$ a funkcia je tu rastúca, $f'(x) < 0$ na $(4, \infty)$ a funkcia je tu klesajúca (1 bod)

funkcia sa mení z rastúcej na klesajúcu a f' je nulová pre $x = 4$. Lokálne i globálne maximum funkcie je v bode $[4, 27e^{-4}]$ (1 bod)

$f''(x) = e^{-x}(x-1)(x^2 - 8x + 13), D_{f''} = \mathbb{R}$ (1 bod) nulové body 2. derivácie: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4 + \sqrt{3} \vee x = 4 - \sqrt{3}$ (1 bod)

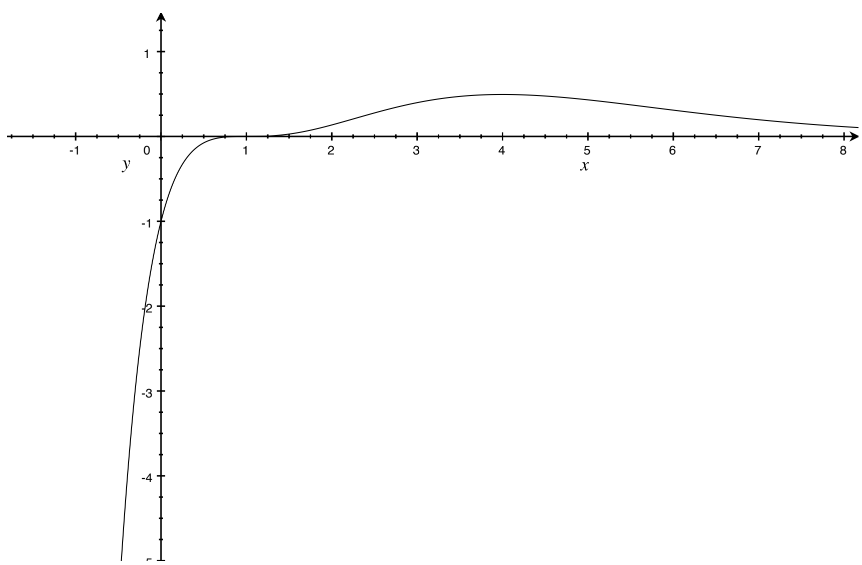
konvexita/ konkavita: $f''(x) > 0$ na $(1, 4-\sqrt{3})$ a $(4+\sqrt{3}, \infty)$ a funkcia je tu konvexná, $f''(x) < 0$ na $(-\infty, 1)$ a $(4-\sqrt{3}, 4+\sqrt{3})$ a funkcia je tu konkávna (1 bod)

inflexné body $[1, 0], [4-\sqrt{3}, e^{-4+\sqrt{3}}(3-\sqrt{3})^3], [4+\sqrt{3}, e^{-4-\sqrt{3}}(3+\sqrt{3})^3]$ (1 bod)

asymptoty $y = kx + q$: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{-x}(x-1)^3}{x} = 0 = k_1 \ldots$ L'H alebo rýchlosť e, $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}(x-1)^3 - 0x = 0 = q_1 \ldots$ spočítané hore $\Rightarrow$ asymptota v ∞ je $y = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}(x-1)^3}{x} = \infty \cdot \infty = \infty$, asymptota v $-\infty$ neexistuje (2 body)

graf: (3 body)



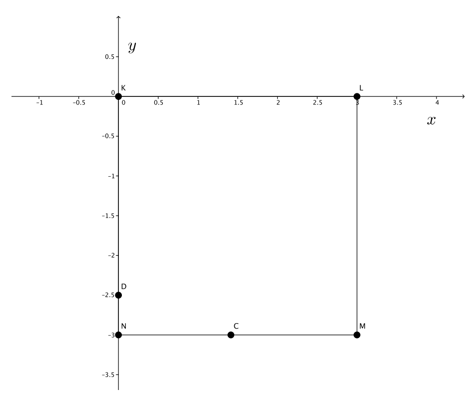
2. Uvažujme funkci $f(x, y) = x^3 + y^2 + 2xy + 5y + 6$.
a) Vyšetřete, v jakých bodech $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ má f lokální maxima, lokální minima a sedlové body.
b) Najděte maximum a minimum funkce f na obdélníku s vrcholy o souřadnicích [0,-3], [3, 0], [0, 0] a [3,-3].
Nakreslete zadanou množinu i všechny nalezené kandidáty na extrém.

---

a) $D_f = \mathbb{R}^2$
$\partial_x f = 3x^2 + 2y$
$\partial_y f = 2x + 2y + 5$ (1 bod)
$\partial_x f = \partial_y f = 0$ v bodoch $A[-1, -\frac{3}{2}], B[\frac{5}{3}, -\frac{25}{6}]$ (1 bod)
$\partial_{xx} f = 6x$
$\partial_{xy} f = \partial_{yx} f = 2$
$\partial_{yy} f = 2$ (1 bod)

$|\mathbf{H}(A)| = -16 \ldots$ sedlo v bode A
$|\mathbf{H}(B)| = 16, \partial_{xx} f = 10 \ldots$ lokálne minimum v bode B (1 bod)

b) obrázok so všetkými bodmi (1 bod)
volné extrémy: body A a B z a) nepatria množine (1 bod)
vrcholy: $f(0, 0) = 6, f(3, 0) = 33, f(0, -3) = 0, f(3, -3) = 9$ (1 bod)
úsečka KL: $y = 0, x \in (0, 3)$
$f(x, 0) = g(x) = x^3 + 6$ (1 bod)
$g'(x) = 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin (0, 3)$ ... žiadny kandidát (1 bod)
úsečka MN: $y = -3, x \in (0, 3)$
$f(x, -3) = g(x) = x^3 - 6x$ (1 bod)
$g'(x) = 3x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \ldots$ kandidát $C[\sqrt{2}, -3]$ (1 bod)



úsečka KM: $x = 0, y \in (-3, 0)$
$f(0, y) = g(y) = y^2 + 5y + 6$ (1 bod)
$g'(y) = 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{2} \ldots$ kandidát $D[0, -\frac{5}{2}]$ (1 bod)
úsečka LN: $x = 3, y \in (-3, 0)$
$f(3, y) = g(y) = y^2 + 11y + 33$ (1 bod)
$g'(y) = 2y + 11 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{11}{2} \notin (-3, 0) \ldots$ žiadny kandidát (1 bod)

$f(\sqrt{2}, -3) = -4\sqrt{2}, f(0, -\frac{5}{2}) = -\frac{1}{4}$
Maximum: $L[3, 0]$ s hodnotou 33, minimum: $C[\sqrt{2}, -3]$ s hodnotou $-4\sqrt{2}$ (1 bod)

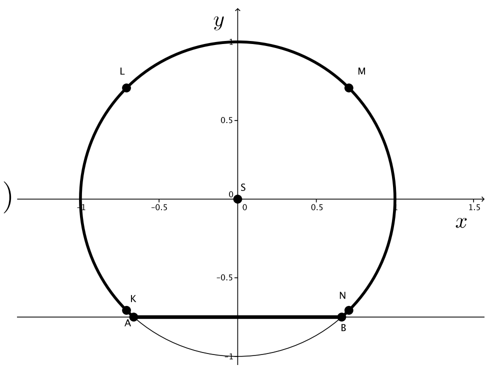
3. Určete extrémy funkce $f(x,y) = xy$ na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq -\frac{3}{4}\}$.
Nakreslete zadanou množinu i všechny nalezené kandidáty na extrém.

Obrázok so všetkými kandidátmi (2 body)

Priesečníky kružnice a priamky - riešením sústavy:

1) $x^2 + y^2 = 1$

2) $x = -\frac{3}{4}$



Riešením sú body $A[-\frac{\sqrt{7}}{4}, -\frac{3}{4}], B[\frac{\sqrt{7}}{4}, -\frac{3}{4}]$ (2 body)
Voľné extrémy: $\partial_x f = y, partial_y f = x$, parciálne derivácie sú nulové v bode $S[0,0]$, ktorý patrí množine, takže je kandidát (1 bod)
Úsečka AB (dosadením): $y = -\frac{3}{4}, x \in (-\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4})$
$f(x, -\frac{3}{4}) = g(x) = -\frac{3}{4}x$ (1 bod)
$g'(x) = -\frac{3}{4} \neq 0$ …žiaden kandidát (1 bod)

Oblúk AB (Jacobián): $|\mathbf{J}| = 2y^2 - 2x^2, |\mathbf{J}| = 0 \Leftrightarrow x = \pm y$ (1 bod)
dosadením do $x^2 + y^2 = 1$ dostávame $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, t.j. celkovo 4 kandidáti:
$K[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}], L[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}], M[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}], N[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ (3 body)

$f(A) = \frac{3\sqrt{7}}{16}, f(B) = -\frac{3\sqrt{7}}{16}, f(S) = 0, f(K) = f(M) = \frac{1}{2}, f(L) = f(N) = -\frac{1}{2}$,
maximum v bodoch K, M, minimum v bodoch L, N. (1 bod)

4. Určete extrémy funkce $f(x,y,z) = 5x+2y+2z+13$ na množině dané vazbami:

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1$$

$$g_2(x,y,z) = -x + y - z - \tfrac{1}{5}.$$

Využijte metodu Lagrangeových multiplikátorů a vypočítejte hodnoty příslušných multiplikátorů.

Volné extrémy: spočítaním derivácií, alebo odôvodnením, že ide o „lineárnu“ funkciu v každej zložke. (0,5 bodu)

Lagrange:
$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 5x + 2y + 5z + \lambda_1(x^2 + y^2 - 1) + \lambda_2(-x + y - z - \frac{1}{5})$ (1 bod)

1) $\partial_x L = 5 + 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0$

2) $\partial_y L = 2 + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0$

3) $\partial_z L = 2 - \lambda_2 = 0$ (1,5 bodu)

4) $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

5) $g_2(x,y,z) = -x + y - z - \frac{1}{5} = 0$

Výpočet (optimálny, nazáleží ak ste došli k správnym záverom):
$3) \Rightarrow \lambda_2 = 2$ (2 body)
$\lambda_2 \to 1), 2) \Rightarrow x = -\frac{3}{2\lambda_1}, y = -\frac{2}{\lambda_1}$
$x, y \to 4) \Rightarrow \lambda_1 = \pm\frac{5}{2}$ (2 body)
dopočítanie x, y, z (6 bodov)
kandidáti:
$\lambda_1 = \frac{5}{2}, \lambda_2 = 2, A[-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}], f(A) = \frac{38}{5}$
$\lambda_1 = -\frac{5}{2}, \lambda_2 = 2, B[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0], f(B) = \frac{88}{5}$
Maximum je v bode B, minimum v bode A (1 bod)