Riešenie záverečného testu Varianta C, ZS 2014/2015

UPOZORNENIE: Priložené bodovanie sa vzťahuje na moje skupiny študentov, bodovanie jednotlivých cvičiacich sa môže a bude mierne líšiť.
V prípade, že odhalíte chybu/preklep (aj s odstupom), napíšte mi to prosím do mailu, môže to zachrániť zdravie iných.

1. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = (x+2)\sqrt{7-x},$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitýh bodech), limity v krajních bodech Df , derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body, nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.

---

definičný obor: z odmocniny plynie: $x \leq 7 \Rightarrow D_f = (-\infty, 7\rangle$ (1 bod)

Priamo z definičného oboru plynie (alebo overením), že funkcia nie je ani sudá ani lichá. (1 bod)

$P_x : f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 7$ t.j., $P_{1x}[-2, 0], P_{2x}[7, 0]$
$P_y : x = 0 \Rightarrow P_y[0, 2\sqrt{7}]$ (1,5 bodu)

znamienko funkcie (dosadením): funkcia je na $(-\infty, -2)$ záporná, na $(-2, 7)$ kladná (1 bod)

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x+2)\sqrt{7-x} = -\infty \cdot \infty = -\infty$
$\lim\limits_{x\to 7} (x+2)\sqrt{7-x} = 9 \cdot 0 = 0$ (dosadením, $7 \in D_f$) (1 bod)

$f'(x) = \dfrac{3(4-x)}{2\sqrt{7-x}}; x < 7$, derivácia existuje na intervale $(-\infty, 7)$ (1,5 bodu)

$f'_x = 0 \Leftrightarrow x = 4$ (1 bod)

monotónnosť funkcie: $f'(x) > 0$ na intervale $(-\infty, 4)$ a funkcia je tu rastúca, $f'(x) < 0$ na intervale $(4, 7)$ a funkcia je tu klesajúca (1 bod)

globálne maximum je v bode $[4, 6\sqrt{3}]$ (1 bod)

$f''(x) = \dfrac{3(x-10)}{4(7-x)^{\frac{3}{2}}}$, 2. derivácia existuje na intervale $(-\infty, 7)$ (1,5 bodu)

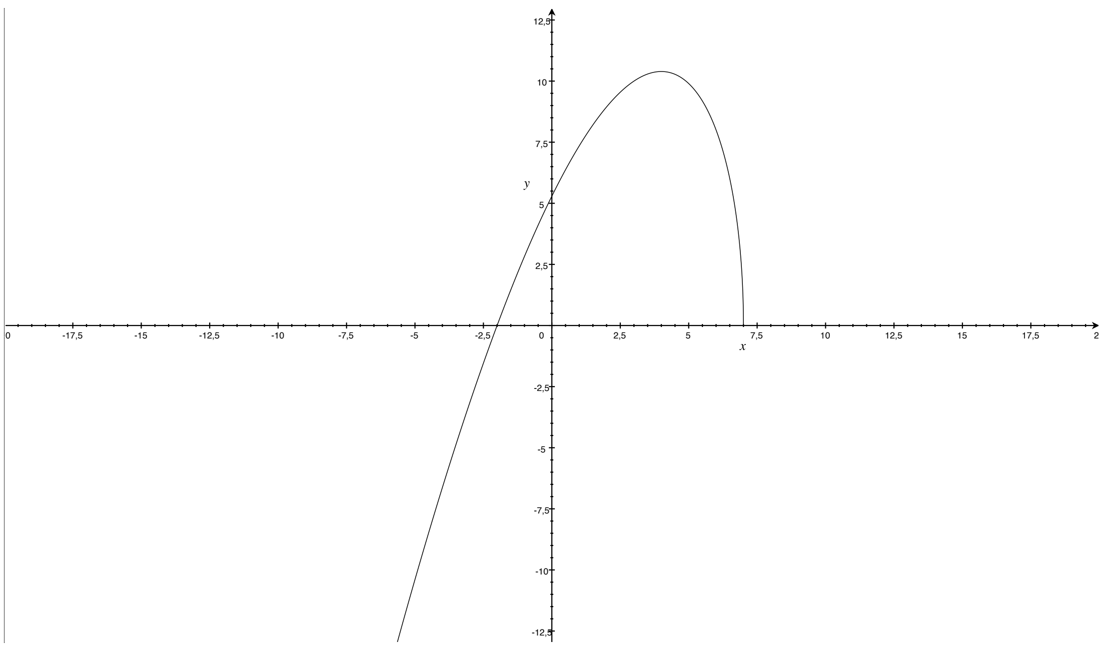
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10 \notin D_f$ (1 bod)

konvexita/ konkavita: $f''(x) < 0$ na $(-\infty, 7)$ a funkcia je tu konkávna (1 bod)

inflexné body funkcia nemá (0,5 bodu)

asymptoty $y = kx + q$: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x+2)\sqrt{7-x}}{x} = \infty$, neexistuje (1 bod)

graf: (3 body)



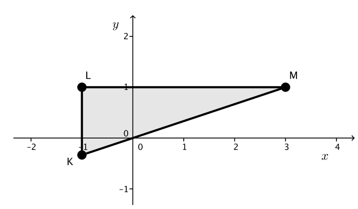
2. Uvažujme funkci $f(x,y) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2y - 4y - 8x$.
a) Vyšetřete, v jakých bodech $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ má f lokální maxima, lokální minima a sedlové body.
b) Najděte maximum a minimum funkce f na trojúhelníku s vrcholy o souřadnicích $[-1, -\frac{1}{3}], [-1, 1]$ a $[3, 1]$.
Nakreslete zadanou množinu i všechny nalezené kandidáty na extrém.

---

a) $D_f = \mathbb{R}^2$
$\partial_x f = -x^2 + 2xy - 8$
$\partial_y f = x^2 - 4$ (1 bod)
$\partial_x f = \partial_y f = 0$ v bodoch $A[2,3], B[-2,-3]$ (1 bod)
$\partial_{xx} f = -2x + 2y$
$\partial_{xy} f = \partial_{yx} f = 2x$
$\partial_{yy} f = 0$ (1 bod)

$|\mathbf{H}(A)| = |\mathbf{H}(B)| = -16\ldots$ v bodoch A a B sú sedlá (1 bod)

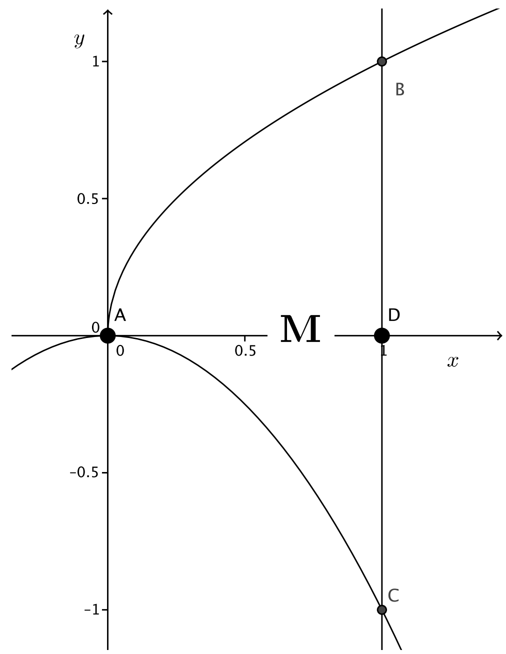
b) obrázok so všetkými bodmi (1 bod)
voľné extrémy: body A,B z a) nepatria množine (1 bod)
vrcholy: $f(-1, -\frac{1}{3}) = \frac{28}{3}, f(-1,1) = \frac{16}{3}, f(3,1) = -28$ (1 bod)
úsečka KL: $x = -1, y \in (-\frac{1}{3}, 1)$
$f(-1,y) = g(y) = -3y + \frac{25}{3}$ (1,5 bodu)
$g'(y) = -3 \neq 0 \Rightarrow$ žiadny kandidát (1 bod)



úsečka LM: $y = 1, x \in (-1, 3)$
$f(x,1) = g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x - 4$ (1,5 bodu)
$g'(x) = -x^2 + 2x - 8 \neq 0$ (rovnica má záporný diskriminant)$\Rightarrow$ žiadny kandidát (1 bod)
úsečka KM: $y = \frac{1}{3}x, y \in (-\frac{1}{3}, 1)$
$f(3y, y) = g(y) = -28y$ (2 body)
$g'(x) = -28 \neq 0 \Rightarrow$ žiadny kandidát (1 bod)
Maximum: $K[-1, -\frac{1}{3}]$ s hodnotou $\frac{28}{3}$, minimum: $M[3,1]$ s hodnotou -28 (1 bod)

3. Určete extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : -x^2 \le y \le \sqrt{x},\ 0 \le x \le 1\}$.
Nakreslete zadanou množinu i všechny nalezené kandidáty na extrém.

Obrázok so všetkými kandidátmi (2 body)



Priesečníky paraboly a odmocninovej f-cie, riešením sústavy:

1) $-x^2 = y$

2) $\sqrt{x} = y$

Riešením je bod $A[0,0]$ (1 bod)
Priesečník odmocninovej f-cie a priamky: $y = \sqrt{x}, x = 1$, dostávame bod $B[1,1]$ (0,5 bodu)
Priesečník paraboly a priamky: $y = -x^2, x = 1$, dostávame bod $C[1,-1]$ (0,5 bodu)

Voľné extrémy: $\partial_x f = 2x, \partial_y f = 2y$, parciálne derivácie sú nulové v bode $A[0,0]$, ktorý je vrcholom a je už podozrivý (1 bod)

Časť paraboly AC (napr. Jacobián): $|\mathbf{J}| = 2x - 4xy, |\mathbf{J}| = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee y_2 = \frac{1}{2}$ dosadením do $-x^2 = y$ dostávame $x_1 = 0, y_1 = 0$, ktorý je vrcholom, pre $y = \frac{1}{2}$ neexistuje reálne x, t.j. žiadny nový kandidát (2,5 bodu)
Časť funkcie AB (napr. Jacobián): $|\mathbf{J}| = 2x + \frac{y}{\sqrt{x}}$, $|\mathbf{J}| = 0$, z druhej rovnice dosadíme $\sqrt{x} = y$, (všade $x > 0$) , dostávame $2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1/2$, ale $x > 0$, takže neexistuje kandidát (2,5 bodu)
Úsečka AB: $x = 1, y \in (-1,1)$
$f(1,y) = g(y) = y^2 + 1$
$g'(y) = 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ kandidát D[1,0] (1 bod)

$f(A) = 0, f(B) = 2, f(C) = 2$, maximum v bodoch B a C, minimum v bode A. (1 bod)

4. Určete extrémy funkce $f(x, y, z) = -8x + 5y - 4z$ na množině dané vazbami:

$$g_1(x, y, z) = -y + x + z$$

$$g_2(x, y, z) = y^2 + z^2 - 1.$$

Využijte metodu Lagrangeových multiplikátorů a vypočítejte hodnoty příslušných multiplikátorů.

Lagrange:
$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = -8x + 5y - 4z + \lambda_1(-y + x + z) + \lambda_2(y^2 + z^2 - 1)$ (1 bod)

1) $\partial_x L = -8 + \lambda_1 = 0$

2) $\partial_y L = 5 - \lambda_1 + 2y\lambda_2 = 0$

3) $\partial_z L = -4 + \lambda_1 + 2z\lambda_2 = 0$ (1,5 bodu)

4) $g_1(x, y, z) = -y + x + z = 0$

5) $g_2(x, y, z) = y^2 + z^2 - 1 = 0$

Výpočet (optimálny, nazáleží ak ste došli k správnym záverom):
$1) \Rightarrow \lambda_1 = 8$ (2 body)
$\lambda_1 \to 2), 3) \Rightarrow y = \frac{3}{2\lambda_2}, z = -\frac{2}{\lambda_2}$
$y, z \to 5) \Rightarrow \lambda_2 = \pm\frac{5}{2}$ (2 body)
dopočítanie x, y, z (6 bodov)
kandidáti:
$\lambda_1 = 8, \lambda_2 = \frac{5}{2}, A[\frac{7}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}], f(A) = -5$
$\lambda_1 = 8, \lambda_2 = -\frac{5}{2}, B[-\frac{7}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}], f(B) = 5$ (0.5 bodu)
Maximum je v bode B, minimum v bode A (1 bod)