Riešenie záverečného testu Varianta A, LS 2014/2015

UPOZORNENIE: Priložené bodovanie sa vzťahuje na moje skupiny študentov, bodovanie jednotlivých cvičiacich sa môže a bude mierne líšiť.
V prípade, že odhalíte chybu/preklep (aj s odstupom), napíšte mi to prosím do mailu, môže to zachrániť zdravie iných.

1. (6b) Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{n^3-2n+1}-\sqrt{n^3-9n^2+3n+2}).$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{n^3-2n+1}-\sqrt{n^3-9n^2+3n+2})\frac{\sqrt{n^3-2n+1}+\sqrt{n^3-9n^2+3n+2}}{\sqrt{n^3-2n+1}+\sqrt{n^3-9n^2+3n+2}}$$
(2b)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{9n^2-5n-1}{\sqrt{n}(\sqrt{n^3-2n+1}+\sqrt{n^3-9n^2+3n+2})} \qquad (2b)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(9-\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2})}{n^2(\sqrt{1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{9}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}})} = \frac{9}{2} \qquad (2b)$$

2. (20b) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = -(x+1)e^{\frac{1}{(x+1)^2}},$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitýh bodech), limity v krajních bodech Df , derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body, nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.

$D_f = \mathbb{R} - 1$ (0,5b)

$f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x)$ porovnaním alebo dosadením nejakej hodnoty, plynie aj priamo z D_f. Funkcia teda nie je ani sudá ani lichá. (0,5b)

$P_x : f(x) \neq 0, e^{\frac{1}{(x+1)^2}}$ je vždy kladná, $(x+1)$ je nulová $\Leftrightarrow x = -1$, z D_f teda vyplýva, že P_x neexistuje. (0,25b)
$P_y : x = 0, f(0) = -e; P_y[0, -e]$ (0,25b)

znamienko funkcie: funkcia je na $(-\infty, -1)$ kladná, na $(-1, \infty)$ záporná (0,5b)

$$\lim_{x\to-\infty} -(x+1)e^{\frac{1}{(x+1)^2}} = -(-\infty)\cdot 1 = \infty \quad (1b)$$

$$\lim_{x\to\infty} -(x+1)e^{\frac{1}{(x+1)^2}} = -\infty \cdot 1 = -\infty \quad (1b)$$

$\lim\limits_{x\to-1^-} -(x+1)e^{\frac{1}{(x+1)^2}}$, limita je tvaru "$0^{\pm}\cdot\infty$", prevedieme ju na tvar "$\frac{\infty}{\infty}$"nasledovne $\lim\limits_{x\to-1^-} -\frac{e^{\frac{1}{(x+1)^2}}}{\frac{1}{x+1}}$ a použijeme L'Hospitala, po úprave dostávame $\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{-2\cdot e^{\frac{1}{(x+1)^2}}}{x+1}$ znovu prevedieme na $\lim\limits_{x\to-1^-} -2\frac{1}{x+1}e^{\frac{1}{(x+1)^2}} = -2\cdot(-\infty)\cdot\infty = \infty$, prípadne aspoň odôvodnením, že exponenciála je rýchlejšia ako polynóm. (1,5b)
$\lim\limits_{x\to-1^+} -(x+1)e^{\frac{1}{(x+1)^2}} = -\infty$, rovnako ako v predošlom prípade.(1,5b)

$f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{(x+1)^2}}(x^2+2x-1)}{(x+1)^2}; D_{f'} = \mathbb{R} - 1$ (2b)

nulové body derivácie: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1+\sqrt{2} \vee x_2 = -1-\sqrt{2}$ (1b)

monotónnosť funkcie: $f'(x) < 0$ na $(-\infty, -1-\sqrt{2})$ a $(-1+\sqrt{2}, \infty)$ a funkcia je tu klesajúca, $f'(x) > 0$ na $(-1-\sqrt{2}, -1)$ a $(-1, -1+\sqrt{2})$ a funkcia je tu rastúca (0,5b)

Lokálne minimum funkcie je v bode $[-1-\sqrt{2}, \sqrt{2e}]$, lokálne maximum funkcie je v bode $[-1+\sqrt{2}, -\sqrt{2e}]$ (0,5b)

$f''(x) = -\frac{2e^{\frac{1}{(x+1)^2}}(x^2+2x+3)}{(x+1)^5}; D_{f''} = \mathbb{R} - 1$ (1,5b)

nulové body 2. derivácie neexistujú (0,5b)

konvexita/ konkavita: $f''(x) > 0$ na $(-\infty, -1)$ a funkcia je tu konvexná, $f''(x) < 0$ na $(-1, \infty)$ a funkcia je tu konkávna (0,5b)

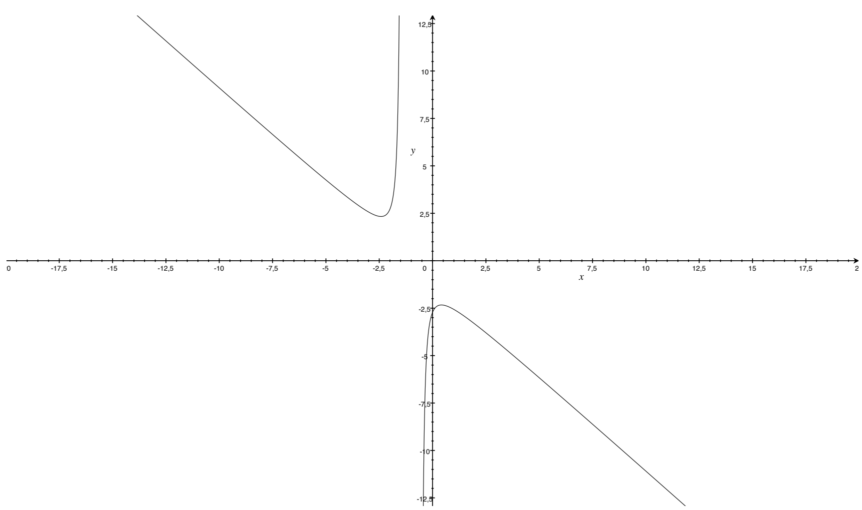
inflexné body funkcia nemá (0,5b)

asymptoty $y = kx + q$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-(x+1)e^{\frac{1}{(x+1)^2}}}{x} = -\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x} + \dfrac{e^{\frac{1}{(x+1)^2}}}{x} = -(1+0) = -1 = k_1 = k_2$ (1,5b)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} -(x+1)e^{\frac{1}{(x+1)^2}} + x = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x(-e^{\frac{1}{(x+1)^2}} + 1) - e^{\frac{1}{(x+1)^2}} = \infty \cdot 0 - 1 = -1 = q_1 = q_2$

asymptoty v oboch nekonečnách splývajú: $y = -x - 1$ (1,5b)

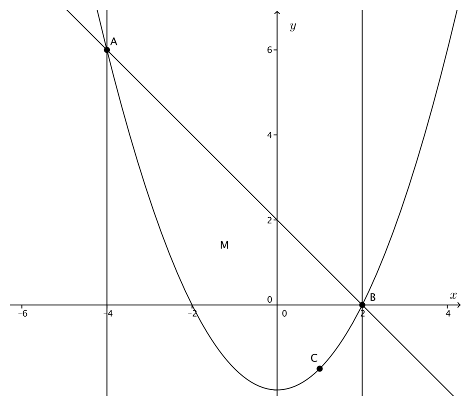
graf: (3 body)



3. (16b) Určete extrémy funkce $f(x, y) = y - x$ na množině
$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq x \leq 2; \frac{x^2}{2} - 2 \leq y \leq 2 - x\}$.
Nakreslete zadanou množinu i všechny nalezené kandidáty na extrém.

Obrázok so všetkými kandidátmi:
parabola s priesečníkmi $[2, 0], [-2, 0]$ a vrcholom $[0, -2]$ (1,5b)
jednotlivé priamky (1,5b)
kandidáti $A[-4, 6], C[1, -\frac{5}{2}], B[2, 0]$ (1b)

Vrcholy: priesečníky paraboly a priamky (priamok) - riešením sústavy:



1) $\frac{x^2}{2} - 2 = y$

2) $2 - x = y$

Riešením sú body $A[-4, 6], B[2, 0]$ (2b)
Stacionárne body: funkcia je lineárna v oboch zložkách takže nemá, prípadne parc. derivácie. (2b)

Viazané extrémy:
Úsečka AB: funkcia je lineárna v oboch zložkách takže nemá, prípadne spočítaním.(2b)
Časť paraboly AB (napr. Jacobián): $|\mathbf{J}| = 1 - x, |\mathbf{J}| = 0 \Leftrightarrow x = 1$)
dosadením do $\frac{x^2}{2} - 2 = y$ dostávame $y = -\frac{3}{2}$, t.j. $C[1, -\frac{3}{2}]$ (4b)

Maximum v bode $A, f(A) = 10$,minimum v bode $C, f(C) = -\frac{5}{2}$, hodnota $f(B) = -2$ (2b).

4. (18b) Určete extrémy funkce $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ na množině dané vazbami:

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$$

$$g_2(x,y,z) = 2z + 3 - x.$$

Využijte metodu Lagrangeových multiplikátorů a vypočítejte hodnoty příslušných multiplikátorů.

Zadaný príklad je na Lagrangeove multiplikátori, preto je výpočet napr. pomocou Jacobiánu hodnotený za 0b.
$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 + y^2 - z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - z^2) + \lambda_2(2z + 3 - x)$ (1 b)

1) $\partial_x L = 2x + 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0$

2) $\partial_y L = 2y + 2\lambda_1 y = 0$

3) $\partial_z L = 2z - 2\lambda_1 z + 2\lambda_2 = 0$

4) $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$

5) $g_2(x,y,z) = 2z + 3 - x = 0$ (5b)

Výpočet (optimálny, nazáleží ak ste došli k správnym záverom):
2) $\Rightarrow y = 0[*] \vee \lambda_1 = -1[**]$
$[*] y = 0 \to 4) \Rightarrow x_1 = z_1[*1] \vee x_2 = -z_2[*2]$
$[*1] x_1 = z_1 \to 5) \Rightarrow x_1 = -3, z_1 = -3 \to 1), 3) \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 12$
$[*2]$ rovnakým postupom $\Rightarrow x_2 = 1, z_2 = -1, \lambda_1 = -\frac{1}{3}, \lambda_2 = \frac{4}{3}$
$[**] \lambda_1 = -1 \to 1) \Rightarrow \lambda_2 = 0 \to 3) \Rightarrow z = 0 \to 4) \Rightarrow x = y = 0$ čo ale nespĺňa posladnú rovnicu, takže $\lambda_1 \neq -1$. (10b)
kandidáti:
$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 12, A[-3,0,3], f(A) = 18$
$\lambda_1 = -\frac{1}{3}, \lambda_2 = \frac{4}{3}, B[1,0,-1], f(B) = 2$
Maximum je v bode A, minimum v bode B (2b)