Riešenie záverečného testu Varianta B, LS 2014/2015

UPOZORNENIE: Priložené bodovanie sa vzťahuje na moje skupiny študentov, bodovanie jednotlivých cvičiacich sa môže a bude mierne líšiť.
V prípade, že odhalíte chybu/preklep (aj s odstupom), napíšte mi to prosím do mailu, môže to zachrániť zdravie iných.

1. (6b) Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^3 - 4n(n\sqrt{2}-3)^2}{n\sqrt{n^2+3n+1}}.$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8n^3 + 12n^2 + \ldots - 8n^3 + 24\sqrt{2}n^2 + \ldots}{n^2\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}} \qquad (4b)$$

$$= 12(1+2\sqrt{2}) \equiv 12 + 24\sqrt{2} \qquad (2b)$$

2. (20b) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \log_2(\sqrt{x^2 - 2}) - 2,$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/ záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitýh bodech), limity v krajních bodech Df , derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body, nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.

Z log plynie $\sqrt{x^2-2} > 0$ a odtiaľ $x^2 - 2 > 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ (0,5b)

$f(-x) = f(x)$ a funkce je sudá. (0,5b)

$P_x : f(x) = 0 \Leftrightarrow \log_2(\sqrt{x^2-2}) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2} = 4 \Leftrightarrow x = \pm 3\sqrt{2}$, t.j. $P_{x1} = [-3\sqrt{2}, 0], P_{x2} = [3\sqrt{2}, 0]$ (0,25b)
$P_y : x = 0 \notin D_f$, takže neexistuje (0,25b)

znamienko funkcie: funkcia je na $(-\infty, -3\sqrt{2})$ a $(3\sqrt{2}, \infty)$ kladná, na $(-3\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ a $(\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ záporná (0,5b)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \log_2(\sqrt{x^2-2}) - 2 = \infty$ (2b)
$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} \log_2(\sqrt{x^2-2}) - 2 = \log_2 0^+ - 2 = -\infty$ (1b)
$\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}^-} \log_2(\sqrt{x^2-2}) - 2 = -\infty$, výpočet, alebo odôvodnenie, že funkcia je sudá. (1b)

$f'(x) = \dfrac{x}{(x^2-2)\ln 2}; x \neq \pm\sqrt{2} \Rightarrow f'$ je definovaná na celom D_f (2b)

nulové body derivácie: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin D_f$ neexistujú a teda ani extrémy neexistujú (1b)

monotónnosť funkcie: $f'(x) < 0$ na $(-\infty, -\sqrt{2})$ a funkcia je tu klesajúca, $f'(x) > 0$ na $(\sqrt{2}, \infty)$ a funkcia je tu rastúca (1b)

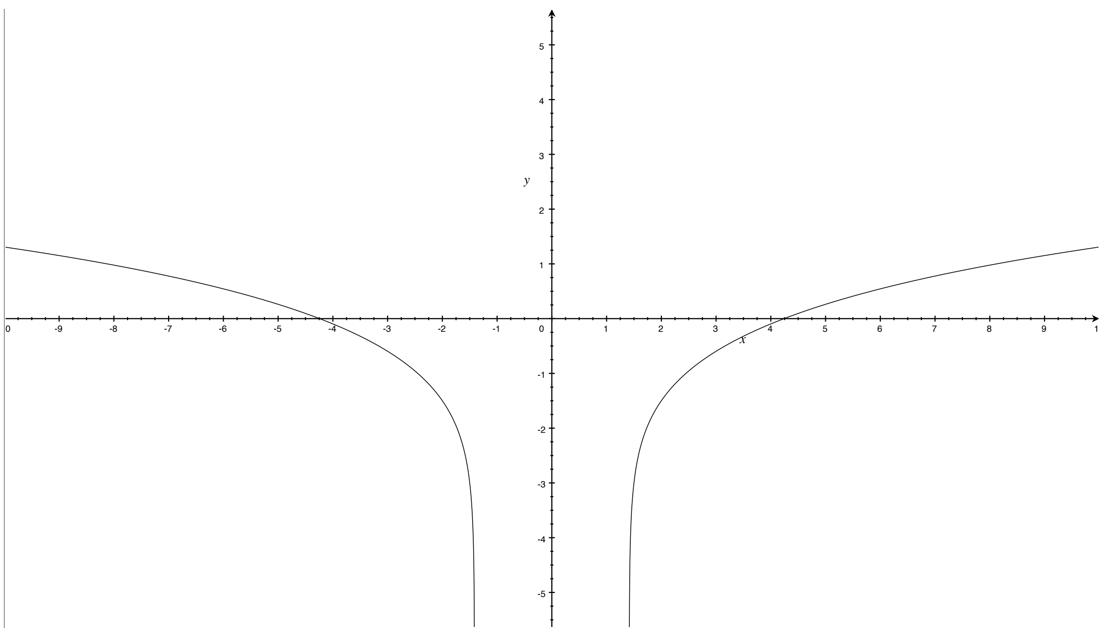
$f''(x) = -\dfrac{2+x^2}{(x^2-2)^2\ln 2}; x \neq \pm\sqrt{2}; f''$ je definovaná na celom D_f (2b)

nulové body 2. derivácie neexistujú, pretože $(x^2+2) > 0$, resp. kvadratická rovnica nemá reálne korene (0,5b) konvexita/ konkavita: $f''(x) < 0$ na celom D_f a funkcia je konkávna (1b)

inflexné body funkcia nemá (0,5b)

asymptoty $y = kx + q$: $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\log_2(\sqrt{x^2-2}) - 2}{x} =$ L'H $\frac{\infty}{\infty}$
$= 0 = k_1 = k_2$ (2b)
$q = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \log_2(\sqrt{x^2-2}) - 2 = \infty \Rightarrow$ asymptoty neexistujú (1b)

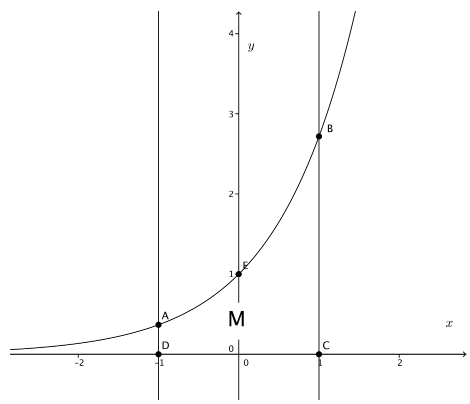
graf: (3b)



3. (16b) Určete extrémy funkce $f(x,y) = -x + y$ na množině
$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq e^x\}$.
Nakreslete zadanou množinu i všechny nalezené kandidáty na extrém.

Obrázok so všetkými kandidátmi:
exponenciála (1,5b)
jednotlivé priamky (1,5b)
kandidáti (1b)

Vrcholy: na ose $x: C[1,0], D[-1,0]$ (1b)
priesečníky exponenciály a priamok $x = \pm 1$ - dosadením: Riešením sú body $A[1,e], B[-1,\frac{1}{e}]$ (1b)
Stacionárne body: funkcia je lineárna v oboch zložkách takže nemá, prípadne cez parc. derivácie. (2b)



Viazané extrémy:
Úsečky BC, CD, DA: funkcia je lineárna v oboch zložkách takže nemá, prípadne spočítaním. (3b)

Časť exponenciály AB (napr. Jacobián): $|\mathbf{J}| = 1 - e^x, |\mathbf{J}| = 0 \Leftrightarrow x = 0$)
dosadením do $e^x = y$ dostávame $y = 1$, t.j. $E[0,1]$ (3b)

Maximum v bode $B, f(B) = e - 1 \doteq 1,72$,minimum v bode $C, f(C) = -1$, hodnoty $f(A) = \frac{1}{e} + 1 \doteq 1,37, f(D) = 1, f(E) = 1$ (2b).

4. (18b) Určete extrémy funkce $f(x,y,z) = xyz$ na množině dané vazbami:

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$g_2(x,y,z) = x + y.$$

Využijte metodu Lagrangeových multiplikátorů a vypočítejte hodnoty příslušných multiplikátorů.

Zadaný príklad je na Lagrangeove multiplikátory, preto je výpočet napr. pomocou Jacobiánu hodnotený za 0b.
$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = xyz + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2(x+y)$ (1b)

1) $\partial_x L = yz + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0$

2) $\partial_y L = xz + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0$

3) $\partial_z L = xy + 2\lambda_1 z = 0$

4) $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

5) $g_2(x,y,z) = x + y = 0$ (5b)

Výpočet (optimálny, nazáleží ak ste došli k správnym záverom):
Sčítame 1) a 2) rovnicu 1) + 2) po úprave:
$(y-x)(z-2\lambda_1) = 0 \Rightarrow [*]y = x \vee [**]z = 2\lambda_1$
$[*]y = x \to 5) \Rightarrow x = y = 0 \to 4) \Rightarrow z = \pm 1 \to 3) \Rightarrow \lambda_1 = 0 \to 1) \Rightarrow \lambda_2 = 0$
2 kandidáti:
$A[0,0,1], \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0; f(A) = 0$
$B[0,0,-1], \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0; f(B) = 0$ (5b)

$[**]z = 2\lambda_1$, z 5) $\Rightarrow y = -x \to 3) \Rightarrow x^2 = 4\lambda_1^2[*1] = y^2 \to 4) \Rightarrow \lambda_1 = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$,
dopočítame z, x, y a nakoniec λ_2
4 kandidáti:
$\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}, \lambda_2 = 0, C[\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]; f(C) = -\frac{\sqrt{3}}{9}$
$\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}, \lambda_2 = 0, D[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]; f(D) = -\frac{\sqrt{3}}{9}$
$\lambda_1 = -\frac{\sqrt{3}}{6}, \lambda_2 = 0, E[\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}]; f(E) = \frac{\sqrt{3}}{9}$
$\lambda_1 = -\frac{\sqrt{3}}{6}, \lambda_2 = 0, F[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}];; f(F) = \frac{\sqrt{3}}{9}$ (5b)

Maximá sú v bodoch E, F, minimá v C, D (2b)