Riešenie záverečného testu Varianta B, ZS 2015/2016

UPOZORNENIE: Priložené bodovanie sa vzťahuje na moje skupiny študentov, bodovanie jednotlivých cvičiacich sa môže a bude mierne líšiť.
V prípade, že odhalíte chybu/preklep (aj s odstupom), napíšte mi to prosím do mailu, môže to zachrániť zdravie iných.

1. (6b) Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{27n-1}\cdot\sqrt[3]{(n+1)^2}}{(2n-3)(2n+3)-16(\frac{1}{2}n+1)^2}.$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{27n^3+53n^2+25n-1}}{-16n-25} = \qquad (2b)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n\sqrt[3]{1+\frac{53}{27n}+\frac{25}{27n^2}-\frac{1}{27n^3}}}{-16n(1+\frac{25}{16n})} = \qquad (2b)$$

$$= -\frac{3}{16} \qquad (2b)$$

2. (18b) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^3}{6x-12},$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/ záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitýh bodech), limity v krajních bodech Df , derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body, nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.

Dále určete tečnu ke grafu v každém jejím inflexním bodě.

Z menovateľa plynie $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ (0,5b)
$f(-x) \neq \pm f(x)$ a funkce nie je ani sudá ani lichá. Plynie priamo z D_f. (0,5b)

$P_x : f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, t.j. $P_x = P_y = [0,0]$ (0,5b)
znamienko funkcie: funkcia je na $(-\infty, 0)$ a $(2, \infty)$ kladná; na $(0,2)$ je záporná (0,5b)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{6x-12} = \infty \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{x^3}{6x-12} = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{6x-12} = \infty \quad \text{(1b)} \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3}{6x-12} = \frac{8}{0^+} = \infty \quad \text{(1b)}$$

$f'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{3(x-2)^2}; x \neq 2 \Rightarrow f'$ je definovaná na celom D_f (2b)
nulové body derivácie: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$ (0,5b)
monotónnosť funkcie: $f'(x) > 0$ na $(3, \infty)$ a funkcia je tu rastúca, $f'(x) < 0$ na intervaloch $(-\infty, 0), (0, 2), (2, 3)$ a funkcia je tu klesajúca (1b)
lokálne minimum funkcie je v bode $[3, \frac{9}{2}]$
lokálne maximum nexistuje (0,5b)

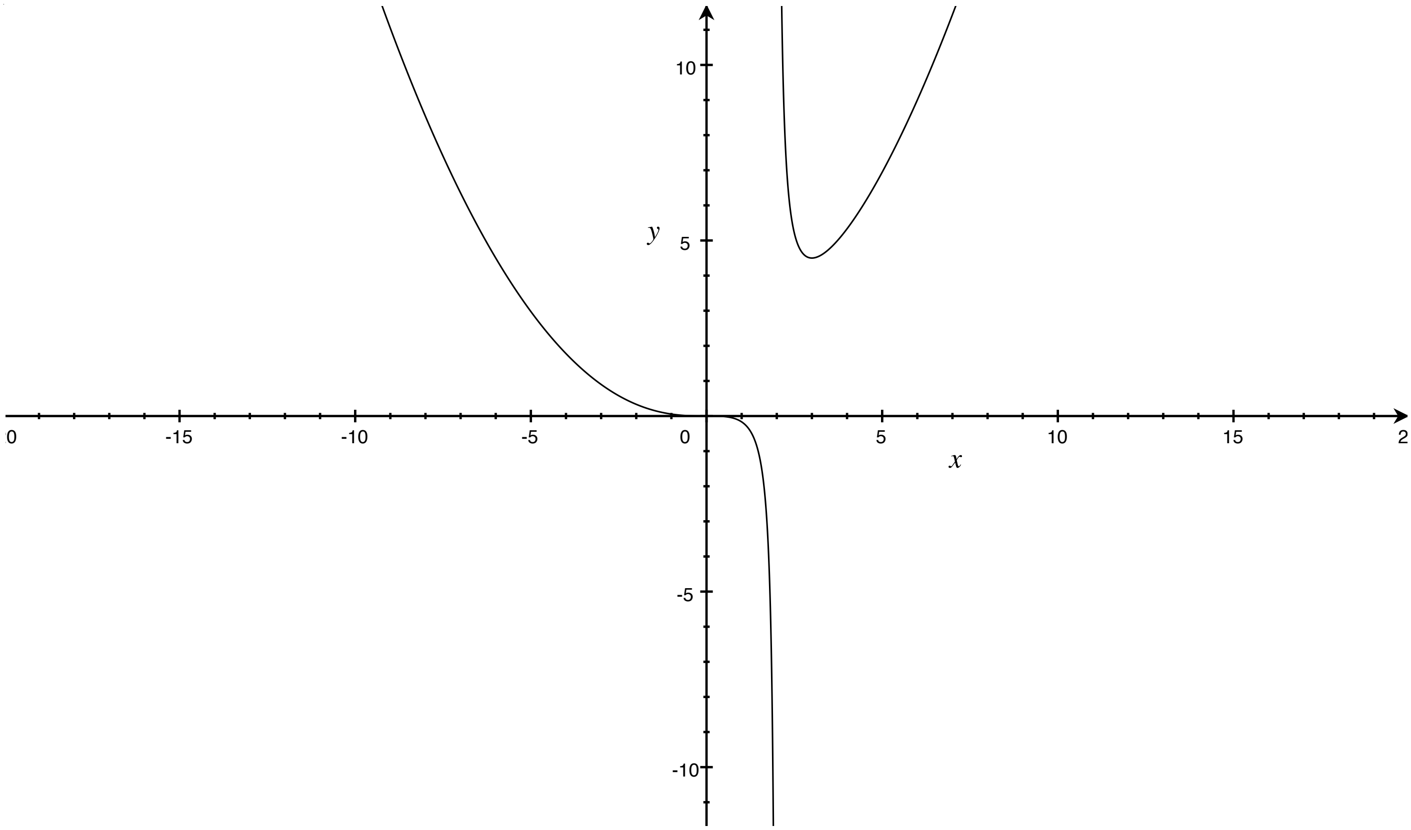
$f''(x) = \dfrac{x(x^2-6x+12)}{3(x-2)^3}; x \neq 2; f''$ je definovaná na celom D_f (2b)
nulové body 2. derivácie $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
člen $x^2 - 6x + 12$ je vždy kladný (napr. riešením kv. rovnice) (0,5b)
konvexita/ konkavita: $f''(x) < 0$ na $(0,2)$ a $(2,\infty)$ a funkcia je tu konkávna, $f''(x) > 0$ na $(-\infty, 0)$ a funkcia je tu konvexná (1b)
inflexný bod $[0,0]$ (0,5b)

asymptota v ∞ : $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(6x-12)} = \infty$ neexistuje
asymptota v $-\infty$: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x(6x-12)} = -\infty$ neexistuje (1b)

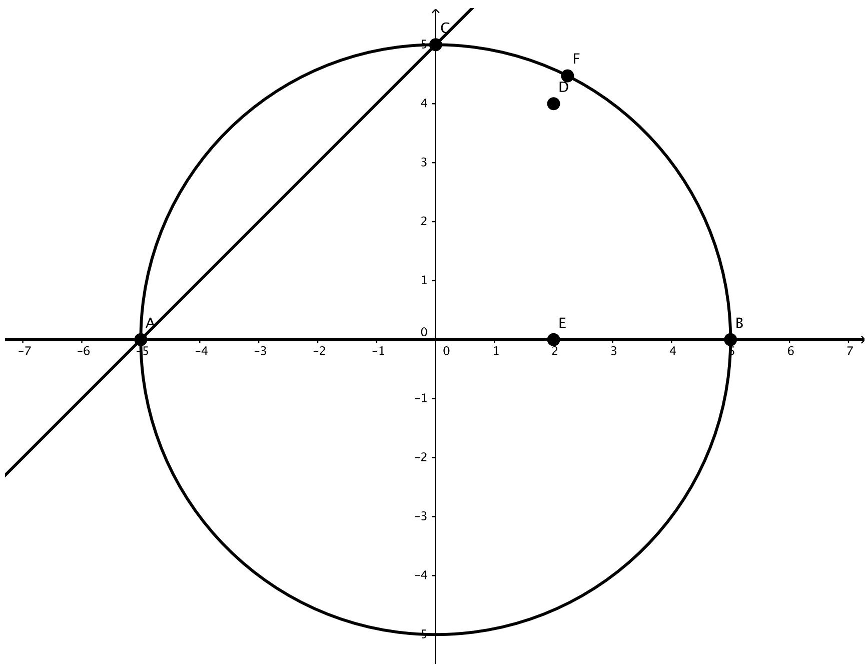
tečna $y = kx + q$ v inflexnom bode $[0,0]$:
$k = f'(0) = 0$
$q = y_0 - 0 \cdot 0 = 0$

$y = 0x + 0 = 0$ (2b)

graf: (3b)



3. (18b) Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 - 4x + y^2 - 8y$ na množině
$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x + 5; x^2 + y^2 \leq 25\}$.



Vrcholy: priesečník priamok $y = 0, y = x + 5$ je bod $A[-5, 0]$ (1b)
priesečníky kružnice a priamok:
$x^2 + y^2 = 25$ a $y = 0$ - dosadením:
Riešením je bod A a $B[5, 0]$ (1b)
$x^2 + y^2 = 25$ a $y = x + 5$ - dosadením:
Riešením je bod A a $C[0, 5]$ (1b)
Stacionárne body:
$\partial_x f = 2x - 4$
$\partial_y f = 2y - 8$
riešením je bod $D[2, 4]$ (2,5b)

Viazané extrémy:
Úsečka $\overline{AB}$
$y = 0, x \in (-5, 5)$
$f(x, 0) = g(x) = x^2 - 4x$
$g'(y) = 2x - 4$
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ kandidát $E[2, 0]$ (3,5b)
Úsečka $\overline{AC}$
$x \in (-5, 0), y = x + 5$
$f(x, x + 5) = g(x) = 2x^2 - 2x - 15$
$g'(x) = 4x - 2$
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \notin (-5, 0)$ žiaden kandidát (3,5b)

Časť kružnice BC (napr. Jacobián):
$(1) g_1 = x^2 + y^2 - 25 = 0$
$(2)\det \mathcal{J} = \det \begin{pmatrix} 2x-4 & 2y-8 \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = 8(2x - y) = 0$ kandidát $F[\sqrt{5}, 2\sqrt(5)]$, druhý bod $[-\sqrt{5}, -2\sqrt(5)]$ neleží na tejto časti (3,5b)

Hodnoty $f(A) = 45, f(B) = 5, f(C) = -15, f(D) = -20, f(E) = -4, f(F) = 5(5 - 4\sqrt{5}) \doteq -19,72$ (1b)
Maximum v bode $A[-5, 0]$,minimum v bode $D[2, 4]$ (1b).

---

4. (18b) Určete globální extrémy funkce $f(x, y, z) = e^{x-z}$
na množině $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + y^2 - z = 0, x^2 + y^2 = 16\}$

Výpočet napr. pomocou Jacobiánu
$(1) g_1 = x + y^2 - z = 0$
$(2) g_2 = x^2 + y^2 - 16 = 0$
$(3)\det \mathcal{J} = \det \begin{pmatrix} e^{x-z} & 0 & -e^{x-z} \\ 1 & 2y & -1 \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix} = 4xye^{x-z} = 0$ (4b)
z (3) máme $(*) x = 0$ alebo $(**) y = 0$
dosadíme $(*)$ do $(1) y^2 - z = 0$ a $(2) y^2 - 16 = 0$
vyriešením sústavy dostávame $A[0, 4, 16], B[0, -4, 16]$ (6b)
dosadíme $(**)$ do $(1) x - z = 0$ a $(2) x^2 - 16 = 0$
vyriešením sústavy dostávame $C[4, 0, 4]; D[-4, 0, -4]$ (6b)
$f(A) = f(B) = e^{-16} \doteq 0, f(C) = f(D) = 1$
maximum v bodoch C, D, minimum v bodoch A, B (2b)